



Eliezer Da Silva Costa Junior

**Análise Numérica da Interação Flexão-Cisalhamento  
em Vigas de Concreto Armado Reforçadas com  
Fibras de Aço.**

## DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Instituto de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

Dissertação orientada pelo Professor Bernardo Nunes De Moraes Neto

Belém – Pará – Brasil

2021

Universidade Federal do Pará  
Instituto de Tecnologia  
Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil



**Eliezer Da Silva Costa Junior**

**Análise Numérica da Interação Flexão-Cisalhamento em Vigas de Concreto Armado Reforçadas com Fibras de Aço.**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Pará como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Bernardo Nunes De Moraes Neto

Belém, 10 de dezembro de 2021.

## **CESSÃO DE DIREITOS:**

AUTOR: Eliezer da Silva Costa Junior.

TÍTULO: Análise Numérica da Interação Flexão-Cisalhamento em Vigas de Concreto Armado Reforçadas com Fibras de Aço.

GRAU: Mestre. ANO: 2021.

É concedida à Universidade Federal do Pará permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

Eliezer da Silva Costa Junior.

Av. Augusto Correa, n° 1, Campus Universitário do  
Guamá, Laboratório de Engenharia Civil. Guamá,  
Belém, Pará. CEP 66075-970

---

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD  
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará  
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a)  
autor(a)**

---

C837a Costa Junior, Eliezer da Silva.

Análise Numérica da Interação Flexão-Cisalhamento em Vigas  
de Concreto Armado Reforçadas com Fibra de Aço / Eliezer da  
Silva Costa Junior. — 2021.

105 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Bernardo Nunes de Moraes Neto  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará,  
Instituto de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil, Belém, 2021.

1. Concreto, fibras de aço, viga, modelagem numérica.. I. Título.

CDD 624

# ANÁLISE NUMÉRICA DA INTERAÇÃO FLEXÃO-CISALHAMENTO EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO REFORÇADAS COM FIBRA DE AÇO

**AUTOR:**

**ELIEZER DA SILVA COSTA JUNIOR**

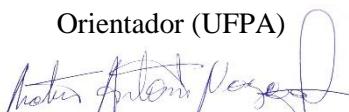
DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À BANCA EXAMINADORA APROVADA PELO COLEGIADO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL DO INSTITUTO DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ, COMO REQUISITO PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL NA ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

APROVADO EM: 21 / 12 / 2021.

BANCA EXAMINADORA:



\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Bernardo Nunes de Moraes Neto  
Orientador (UFPA)



\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Mateus Antonio Nogueira Oliveira  
Membro Externo (UFMG)



\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Alcebíades Negrão Macêdo  
Membro Interno (UFPA)

Visto:

\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Marcelo de Souza Picanço  
Coordenador do PPGEC / ITEC / UFPA

## Resumo

Na presente pesquisa, análises numéricas foram empregadas para avaliar o efeito das fibras de aço na interação flexão-cisalhamento em vigas de concreto armado (CA) com base na resposta *carga-deslocamento*, com o objetivo de avaliar a possibilidade de suprimir os reforços convencionais, barras longitudinais e estribos, e reforçar vigas preeminentemente com fibras de aço. Para viabilizar o tentame, foi estabelecida uma proposta robusta que mescla soluções numéricas, analíticas e empíricas, nesse contexto comenta-se que o comportamento à flexão foi investigado com auxílio de uma ferramenta computacional, o *Design Of CROss Sections* (DOCROS), programa que utiliza o método dos elementos finitos, para alimentar o software foi desenvolvida uma lei constitutiva para representar o comportamento tracionado tanto do CRFA (Concreto Reforçado com Fibras de Aço) quanto do CS (Concreto Simples) e que pondera o efeito das fibras no concreto e o *tension-stiffening*.

Quanto ao estudo do cisalhamento, o mesmo foi viabilizado por meio de um critério de ruína desenvolvido com base na filosofia dos trabalhos do professor MUTTONI, nesse cenário também se mostrou necessária a idealização de uma proposta analítica simplificada para calcular o momento fletor resistente de vigas que fosse prática a ponto de viabilizar o cálculo de um grande número elementos. Ademais, já que tanto a análise do comportamento à flexão quanto do cisalhamento de vigas em CRFA dependem dos resultados da caracterização do material, foi proposto um modelo teórico para estimar o valor das resistências residuais que são obtidas nos ensaios característicos, contornando a limitação pouco prática de depender de resultados experimentais para análise desses elementos estruturais.

Por fim, com a metodologia estabelecida, foram empregadas análises paramétricas para avaliar a competitividade das fibras de aço ante os reforços convencionais, no entanto só foram auferidas supressões significativas com o auxílio de algumas estratégias que potencializam o desempenho das fibras, a saber, o aumento da resistência à compressão do concreto e a otimização da geometria da seção transversal. Findada a investigação, os resultados atestaram a viabilidade técnica de reforçar vigas ao cisalhamento e à flexão majoritariamente com fibras de aço.

### Palavras-chave:

**Concreto, fibras de aço, flexão, cisalhamento, viga, modelagem numérica.**

## Abstract

In this paper numerical analyses were performed to appraise the effect of steel fibers in the shear-moment interaction of reinforced concrete beams based on *load-displacement* diagram with the purpose of examine the possibility of suppress the conventional reinforcements, stirrups and longitudinal bars, and reinforce beams preeminently with steel fibers. To make it possible, a robust proposal has been established which combines numerical, analytical and empirical solutions, in this context the behavior flexural was investigated with the aid of a computational tool, the *Design Of CROss Sections* (DOCROS), program that uses the finite element method, to supply the software was developed a constitutive law to represent the tensioned behavior of both SFRC (Steel Fiber Reinforced Concrete) and UC (Unreinforced Concrete) which ponders the effect of fibers and the *tension-stiffening*.

Regarding the study of shear, it was made possible through a failure criterion developed on the basis of the philosophy of the teacher MUTTONI's researchs, in this scenario also arose the need to idealize a simplified analytical proposal to estimate the ultimate bending moment of beams which would be practical enough to allow the calculation of a large number of elements. Moreover, since the analysis both of shear behavior and flexural behavior of SFRC beams depend on the results of the characterization of the material, a theoretical model was proposed to estimate the value of residual resistances, overcoming the impractical limitation of relying on experimental results for analysis of these structural elements.

Finally, with the established methodology, parametric analyses were performed to assess the competitiveness of steel fibres in relation to conventional reinforcements, however significant suppressions were only obtained with the aid of some strategies that enhance the performance of the fibers, namely, increasing the compressive strength of the concrete and optimising the geometry of the cross section. With the end of research, the results attested the technical viability of use steel fibers as majoritary reinforcement both shear and flexural on reinforced concrete beams.

## Keywords

**Concrete, steel fibres, bend, shear, beam, numerical modeling.**

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura</b>	<b>Página</b>
Figura 1. Edifício <i>Triangle Office</i> localizado em <i>Tallinn/Estônia</i> .....	2
Figura 2. Aparência da fibra de aço e do CRFA.....	6
Figura 3. Construção da <i>Rocca Tower</i> em <i>Tallinn/Estônia</i> .....	6
Figura 4. Mecanismo de resistência ao cisalhamento de vigas em CRFA sem estribos.....	7
Figura 5. Detalhamento das vigas ensaiadas por AOUDE <i>et al.</i> (2012).....	9
Figura 6. Seção transversal das vigas ensaiadas por AOUDE <i>et al.</i> (2012).....	9
Figura 7. Registro <i>carga-deslocamento</i> ( $V-\delta$ ) das vigas ensaiadas por AOUDE <i>et al.</i> (2012).....	10
Figura 8. Detalhamento das vigas de CUCCHIARA <i>et al.</i> (2004).....	11
Figura 9. Registro <i>Carga-deslocamento</i> ( $V-\delta$ ) das vigas de CUCCHIARA <i>et al.</i> (2004).....	12
Figura 10. Modelo analítico para prever a resistência à flexão de vigas em CRFA.....	13
Figura 11. Detalhamento das vigas estudadas por KAKLAUKAS <i>et al.</i> (2014).....	14
Figura 12. Registro <i>momento-curvatura</i> ( $m-\varphi$ ) das vigas de KAKLAUKAS <i>et al.</i> (2014).....	14
Figura 13. Detalhamento das vigas de DANCYGIER e SAVIR (2006).....	16
Figura 14. Seção transversal das vigas de DANCYGIER e SAVIR (2006).....	16
Figura 15. Registro <i>momento-deslocamento</i> ( $m-\delta$ ) das vigas de DANCYGIER e SAVIR (2006).....	17
Figura 16. Detalhamento das vigas ensaiadas por CARDOSO <i>et al.</i> (2018).....	18
Figura 17. Registros experimentais das vigas ensaiadas por CARDOSO <i>et al.</i> (2018).....	18
Figura 18. Detalhamento das vigas estudadas por DANCYGIER e BERKOVER (2016).....	21
Figura 19. Registro <i>carga-deslocamento</i> ( $V-\delta$ ) das vigas de DANCYGIER e BERKOVER (2016).....	21
Figura 20. Sistema de ensaios das vigas analisadas por IMAN <i>et al.</i> (1997).....	23
Figura 21. Representação gráfica da relação entre $M_u/M_{fl}$ e outros parâmetros.....	24
Figura 22. Sistema de ensaio das vigas avaliadas por MUTTONI e SCHWARTZ (1991).....	25
Figura 23. Lajes ensaiadas por BOLLINGER (1985).....	26
Figura 24. Relação <i>carga-rotação</i> ( $P-\psi$ ) de lajes com diferentes taxas de armadura.....	27
Figura 25. Fissura crítica de cisalhamento em vigas estudada por MUTTONI (2003).....	28
Figura 26. Critério de Ruína por Cisalhamento para vigas sem reforço transversal.....	29
Figura 27. Fissura crítica de cisalhamento em lajes sem reforço transversal.....	30
Figura 28. Critério de Ruína por Punção para lajes sem reforço transversal.....	30
Figura 29. Relações $m-\varphi$ quadrilinar e bilinar propostas por MUTTONI (2008).....	32
Figura 30. Lajes ensaiadas por KINNUNEN e NYLANDER (1960).....	33
Figura 31. Resultados do modelo proposto por MUTTONI (2008) versus Resultados Experimentais.....	34
Figura 32. Processo de dimensionamento e verificação proposto por MUTTONI (2008).....	34
Figura 33. Modelagem da viga S3-2-3 de KAKLAUKAS <i>et al.</i> (2014).....	35
Figura 34. Leis constitutivas.....	37
Figura 35. Confronto entre as relações $m-\varphi$ experimentais e numéricas.....	40
Figura 36. Lei constitutiva do concreto tracionado proposta por TORRES <i>et al.</i> (2004).....	41

Figura 37. Lei constitutiva do concreto simples tracionado. ....	42
Figura 38. Análise da importância do <i>tension-stiffening</i> com base nas relações $m\cdot\phi$ . ....	42
Figura 39. Relações entre os parâmetros $f_{R1}, f_{R3}$ e $(f_c \cdot V_f \cdot l / d_f)$ . ....	44
Figura 40. Modelagem das vigas A1% e A0% de AOUDE <i>et al.</i> (2012)....	47
Figura 41. Modelagem numérica da viga A1% de AOUDE <i>et al.</i> (2012)....	48
Figura 42. Integração do diagrama de curvatura. ....	49
Figura 43. Avaliação da Rigidez. ....	50
Figura 44. Resultados da modelagem da viga A1%. ....	50
Figura 45. Desenvolvimento do Critério de ruína. ....	52
Figura 46. Modelo de flexão do FIB MODEL CODE 10 (2012) ....	55
Figura 47. Exemplos de aplicação do Critério de Ruína. ....	59
Figura 48. Análise do Critério de Ruína da viga A1%. ....	60
Figura 49. Interação entre os modelos de flexão e cisalhamento. ....	61
Figura 50. Modelagem das vigas de referência para a análise paramétrica.....	62
Figura 51. Resultado da modelagem das vigas de referência. ....	64
Figura 52. Vigas idealizadas para a análise paramétrica. ....	66
Figura 53. Fibra de aço idealizada na análise paramétrica. ....	67
Figura 54. Análise paramétrica de flexão das vigas com o aço $\phi-1$ .....	68
Figura 55. Análise paramétrica de cisalhamento das vigas com o aço $\phi-1$ .....	70
Figura 56. Análise paramétrica de flexão das vigas com o aço $\phi-2$ .....	71
Figura 57. Análise paramétrica de cisalhamento das vigas com o aço $\phi-2$ .....	72
Figura 58. Análise paramétrica de flexão das vigas com o aço $\phi-3$ .....	73
Figura 59. Análise paramétrica de cisalhamento das vigas com o aço $\phi-3$ .....	74

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela</b>	<b>Página</b>
Tabela 1. Informações básicas das vigas de AOUDE <i>et al.</i> (2012).....	8
Tabela 2. Informações básicas das vigas de CUCCHIARA <i>et al.</i> (2004). ....	10
Tabela 3. Informações básicas das vigas de KAKLAUSKAS <i>et al.</i> (2014).....	13
Tabela 4. Informações básicas das vigas de DANCYGIER e SAVIR (2006).....	15
Tabela 5. Informações básicas das vigas de CARDOSO <i>et al.</i> (2018).....	17
Tabela 6. Informações básicas das vigas de DANCYGIER e BERKOVER (2016) .....	20
Tabela 7. Análise da Influência de diversos parâmetros na Resistência Relativa ( $M_u/M_{fl}$ ). ....	24
Tabela 8. Resumo estatístico do resultado da análise do Critério de Ruína para vigas. ....	29
Tabela 9. Resumo estatístico do resultado da análise do Critério de Ruína para Lajes. ....	31
Tabela 10. Dimensões dos Layers do modelo numérico (1).....	36
Tabela 11. Lei constitutiva do concreto (1).....	40
Tabela 12. Lei constitutiva do aço do reforço longitudinal (1).....	40
Tabela 13. Resumo do Banco de Dados (Caracterização à tração do CRFA). ....	44
Tabela 14. Resumo estatístico das Equações propostas. ....	45
Tabela 15. Dimensões dos Layers do modelo numérico (2).....	47
Tabela 16. Lei constitutiva do concreto (2).....	47
Tabela 17. Lei constitutiva do aço do reforço longitudinal (2).....	47
Tabela 18. Resumo do Banco de Dados (Critério de Ruína por Cisalhamento).....	52
Tabela 19. Resumo estatístico da análise do Critério de Ruína.....	58
Tabela 20. Parâmetros para representação gráfica do critério de ruína por cisalhamento (1). ....	59
Tabela 21. Dimensões dos Layers do modelo numérico (3).....	63
Tabela 22. Lei constitutiva do concreto (3).....	63
Tabela 23. Lei constitutiva do aço do reforço longitudinal (3).....	63
Tabela 24. Parâmetros para representação gráfica do critério de ruína por cisalhamento (2). ....	63
Tabela 25. Lei constitutiva do aço do reforço transversal. ....	63
Tabela 26. Informações básicas das vigas hipotéticas. ....	66
Tabela 27. Dimensões dos Layers do modelo numérico (4).....	67
Tabela 28. Lei constitutiva do concreto (4).....	68
Tabela 29. Lei constitutiva do aço do reforço longitudinal (4).....	68
Tabela 30. Parâmetros do critério de ruína por cisalhamento das vigas com o aço $\phi$ -1. ....	69
Tabela 31. Parâmetros do critério de ruína por cisalhamento das vigas com o aço $\phi$ -2. ....	71
Tabela 32. Parâmetros do critério de ruína por cisalhamento das vigas com o aço $\phi$ -3. ....	74
Tabela 33. Resumo das supressões auferidas. ....	75

## LISTA DE SÍMBOLOS

Neste item são apresentados os principais símbolos utilizados na dissertação. Aqueles que não estão listados aqui têm seus significados esclarecidos assim que mencionados ao longo do texto

<b>Símbolos</b>	<b>Significado</b>
$a$	vão de corte
$a/d$	razão entre o vão de corte e a altura útil da viga
$b; b_w$	base da viga
$C_f$	consumo de fibra
$C_s$	resultante de compressão da armadura
$d$	altura útil da viga
$d'$	altura útil da armadura comprimida da viga
$d_0$	diâmetro de referência
$d_a; d_g$	diâmetro máximo do agregado
$d_f$	diâmetro da fibra de aço
$E \cdot I$	rigidez da seção
$E_c$	módulo de elasticidade do concreto
$EI_0$	rigidez inicial não fissurada
$EI_1$	rigidez fissurada
$E_s$	módulo de elasticidade do aço
$E_t$	módulo de elasticidade residual do efeito <i>tension-estiffening</i>
$F$	fator fibra
$f_c$	resistência à compressão do concreto
$f_{ct}$	resistência à tração do concreto
$f_{ctr}$	tensão desenvolvida pelo concreto com fibras de aço
$f_{Flu}$	tensão desenvolvida pelo concreto com fibras no estado limite último
$f_{Rcf}$	tensão residual do concreto com fibras
$f_{Ri}$	tensão residual característica do concreto com fibras de aço
$f_{Rts}$	tensão residual do efeito <i>tension-estiffening</i>
$f_s$	tensão desenvolvida no aço
$f_{su}$	tensão de ruptura do aço
$f_{sy}$	tensão de escoamento do aço
$f_{yw}$	tensão de escoamento do aço da armadura transversal
$h$	altura da viga
$h_{sp}$	altura do prisma
$k_{d0}; k_d$	fator de escala para vigas
$k_{dg}$	fator de escala para o diâmetro máximo do agrado
$L$	vão da viga / laje

$l_{cs}$	comprimento característico estrutural
$l_f$	comprimento da fibra de aço
$l_f/d_f$	fator de forma da fibra de aço
$m; M$	momento fletor
$M_{cf}$	parcela do momento fletor resistente referente ao concreto com fibras
$m_{cr}$	momento de fissuração
$m_R; M_R; M_{fl}$	momento fletor resistente
$M_{sc}$	parcela do momento fletor resistente referente à armadura comprimida
$M_{st}$	parcela do momento fletor resistente referente à armadura tracionada
$M_u; M_V$	momento fletor correspondente a ruína por cisalhamento
$P$	carga
$S$	espaçamento do estribo
$s_{rm}$	distância média entre fissuras
$u$	perímetro crítico de cisalhamento
$V$	força cortante / carga no ensaio <i>stuttgart</i>
$V_a$	componente de contribuição do engrenamento do agregado na resistência ao cisalhamento
$V_c$	componente de contribuição total do concreto na resistência ao cisalhamento
$V_{cc}$	componente de contribuição do concreto comprimido na resistência ao cisalhamento
$V_d$	componente de contribuição do efeito pino na resistência ao cisalhamento / força cortante de a cálculo
$V_{fib}$	componente de contribuição das fibras na resistência ao cisalhamento
$V_{flex}$	força cortante referente ao colapso por flexão
$V_{frc}$	resistência ao cisalhamento de vigas em CRFA
$V_{Rd}$	resistência ao cisalhamento / punção de cálculo
$V_{sw}$	componente de contribuição da armadura transversal na resistência ao cisalhamento
$V_u; V_R$	força cortante última resistida pela viga / resistência à punção da laje
$w$	abertura da fissura
$x$	profundidade da linha neutra
$a$	coeficiente que pondera a relação $a/d$ no critério de ruína / ângulo do estribo em relação ao eixo da viga
$a_E$	fator de contribuição do agregado no modulo de elasticidade do concreto
$\beta$	coeficiente que pondera a relação $h/b$ no critério de ruína
$\gamma_c$	coeficiente de segurança
$\delta$	deslocamento
$\delta_u$	deslocamento referente à ruptura do elemento
$\varepsilon$	deformação
$\varepsilon_a; \varepsilon_c$	deformação na fibra mais comprimida
$\varepsilon_a; \varepsilon_t$	deformação na fibra mais tracionada

$\varepsilon_{cu}$	deformação de ruptura do concreto
$\varepsilon_{fc}$	deformação correspondente à $f_c$
$\varepsilon_s$	deformação no aço
$\varepsilon_{su}$	deformação de ruptura do aço
$\varepsilon_{sy}$	deformação referente ao escoamento do aço
$\varepsilon_{Ucf}$	deformação última do concreto com fibras
$\varepsilon_{Uts}$	deformação última do efeito <i>tension-estiffening</i>
$\eta$	coeficiente para ponderar a fluência no concreto
$\theta$	rotação da viga / inclinação da biela comprimida
$\lambda$	coeficiente para correção da altura do bloco de compressão / fator para avaliação da assertividade dos modelos teóricos
$\rho ; \rho_{l,c}$	taxa geométrica de armadura longitudinal comprimida
$\rho_{l,t}$	taxa geométrica de armadura longitudinal tracionada
$\rho_{max}$	taxa geométrica máxima de armadura longitudinal
$\rho_{min}$	taxa geométrica mínima de armadura longitudinal
$\rho_w$	taxa geométrica de armadura transversal
$\sigma$	tensão
$\sigma_{tu}$	tensão de tração residual
$\tau_c$	tensão cisalhante resistente do concreto
$\tau_R$	tensão cisalhante resistente da viga
$\varphi$	curvatura
$\varphi_1$	curvatura referente ao início do funcionamento da rigidez fissurada
$\varphi_{cr}$	curvatura correspondente ao momento de fissuração
$\varphi_y$	curvatura correspondente ao escoamento do elemento
$\phi$	diâmetro da barra de aço
$\phi_w$	diâmetro da barra de aço do estribo
$\psi$	rotação da laje
$\psi_d$	rotação correspondente à força cortante de cálculo

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
<b>1.1</b>	<b>JUSTIFICATIVA .....</b>	<b>3</b>
<b>1.2</b>	<b>OBJETIVOS .....</b>	<b>3</b>
1.2.1	OBJETIVO GERAL.....	3
1.2.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	3
<b>1.3</b>	<b>ESTRUTURA DO TRABALHO .....</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>5</b>
<b>2.1</b>	<b>O CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO .....</b>	<b>5</b>
<b>2.2</b>	<b>CISALHAMENTO EM VIGAS DE CRFA .....</b>	<b>7</b>
2.2.1	AOUDE <i>et al.</i> (2012) .....	8
2.2.2	CUCCHIARA <i>et al.</i> (2004).....	10
<b>2.3</b>	<b>FLEXÃO EM VIGAS DE CRFA.....</b>	<b>12</b>
2.3.1	KAKLAUSKAS <i>et al.</i> (2014) .....	13
2.3.2	DANCYGIER e SAVIR (2006).....	14
2.3.3	CARDOSO <i>et al.</i> (2018) .....	17
2.3.4	DANCYGIER e BERKOVER (2016).....	19
<b>2.4</b>	<b>INTERAÇÃO FLEXÃO-CISALHAMENTO.....</b>	<b>22</b>
2.4.1	IMAN <i>et al.</i> (1997).....	22
2.4.2	MUTTONI e SCHWARTZ (1991) .....	25
2.4.3	MUTTONI (2003).....	27
2.4.4	MUTTONI (2008).....	31
<b>3</b>	<b>INVESTIGAÇÃO DO COMPORTAMENTO À FLEXÃO.....</b>	<b>35</b>
<b>3.1</b>	<b>O EFEITO TENSION-STIFFENING.....</b>	<b>41</b>
<b>3.2</b>	<b>ESTIMATIVAS DAS RESISTÊNCIAS RESIDUAIS .....</b>	<b>43</b>
<b>3.3</b>	<b>RESPOSTA CARGA-DESLOCAMENTO NUMÉRICA .....</b>	<b>45</b>
<b>4</b>	<b>CRITÉRIO DE RUÍNA POR CISALHAMENTO.....</b>	<b>51</b>
<b>5</b>	<b>INTEGRAÇÃO DOS MODELOS DE FLEXÃO E CISALHAMENTO .....</b>	<b>60</b>
<b>6</b>	<b>ANÁLISE PARAMÉTRICA .....</b>	<b>61</b>

7	CONCLUSÃO: .....	75
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	79
	ANEXO A: BANCO DE DADOS PARA DESENVOLVIMENTO DO MODELO DE PREDIÇÃO DAS RESISTÊNCIAS RESIDUAIS. .....	88
	ANEXO B: BANCO DE DADOS PARA DESENVOLVIMENTO DO CRITÉRIO DE RUÍNA POR CISALHAMENTO.....	90

## 1 INTRODUÇÃO

O concreto é de longe o material de construção mais utilizado no mundo, sua relevância para a humanidade é tamanha que apenas a água se apresenta como recurso mais consumido que ele, deste modo é correto afirmar que o desenvolvimento do concreto está atrelado ao progresso da civilização, passando pelo império romano em construções de concepções simples, porém imponentes, e chegando aos tempos modernos em complexas e arrojadas arquiteturas viabilizadas pelo advento do Concreto Armado (CA) e Protendido, no atual cenário de rápido e constante evolução tecnológica, o Concreto Reforçado com Fibras de Aço (CRFA) se apresenta como candidato a “concreto do futuro”, indicando o próximo grande passo no desenvolvimento desse material ancestral

Diversos trabalhos têm mostrado o potencial das fibras de aço enquanto mecanismo de reforço para o concreto, conforme apreciado por SWAMY e AI-TA’AN (1981), LIM *et al.* (1987), MICHELS *et al.* (2013), AYLIE *et al.* (2015), YOO *et al.* (2015) e LEE (2017), adicionalmente FIGUEIREDO (2011) comenta que há uma facilitação na aplicação de fibras ao concreto, pois resguardados os devidos cuidados, ocorre como a aplicação de qualquer outro componente que já seria adicionado à mistura.

O reforço assegurado pelas fibras de aço possibilita contornar as limitações do concreto simples (CS), como a resistência à tração insignificante, ductilidade e tenacidade limitada, principalmente ante os esforços de tração e flexão conforme comentado nos trabalhos de SONG e HWANG (2004), KHALOO *et al.* (2014), AMIN e FOSTER (2016) e FIGUEIREDO (2000). Prosseguindo, os trabalhos HSU e HSU (1994), OLIVITO e ZUCCARELLO (2010), TIBERTI *et al.* (2015) e JANG e YUN (2018) demostram que a eficácia desse reforço depende de inúmeros parâmetros inerentes às fibras e ao concreto, como o consumo e geometria das fibras, resistência à compressão do concreto entre outros. Ressalta-se que as condições de preparo influenciam de maneira peremptória nas propriedades do compósito, e por conta disso devem ser controladas com rigor, caso contrário, o reforço provido pelas fibras pode ser comprometido ou até mesmo completamente perdido.

Outra discussão que avança com o progresso do CRFA, é a possibilidade de supressão, parcial ou total, dos reforços convencionais, barras de aço, nos elementos em CA, isso quer dizer que há potencial para que todas as etapas de montagem e instalação de armaduras sejam eliminadas, logrando assim muito tempo e custo com a facilidade da execução e supressão da instalação das

barras tradicionais na forma. Dentre os elementos estruturais concebidos em CRFA destacam-se as Lajes, que vêm sendo reforçadas exclusivamente com fibras conforme demonstrado por DESTRÉE e MANDL (2008), MICHELS *et al.* (2012) e SALEHIAN e BARROS (2015), para ilustrar o comentado apresenta-se a Figura 1, que exibe a construção de um prédio comercial concebido com lajes de CRFA, trata-se do *Triangle Office* localizado em *Tallinn/Estônia*. Para mais, comenta-se que investigações teóricas, numéricas e experimentais, vêm explanando de forma cabal a viabilidade de utilizar as fibras de aço enquanto reforço exclusivo ou majoritário de elementos estruturais de concreto, conforme sublinham os trabalhos de MOBASHER *et al.* (2015), BIOLZI e CATTANEO (2017), LEE *et al.* (2017), GANESAN e RAMANA-MURTHY (1990), PAULTRE *et al.* (2010) e GAO *et al.* (2011), que observaram o CRFA enquanto material constituinte de lajes, vigas, estes de maneira mais categórica, pilares e blocos de fundação, esses últimos ainda de forma incipiente, requerendo mais investigações.

Figura 1. Edifício *Triangle Office* localizado em *Tallinn/Estônia*.



Fonte: DESTRÉE e MANDL (2008).

Apresentado o contexto, revela-se agora o objetivo do presente trabalho. Explorar, a partir de investigações numéricas (não linear do material), a interação flexão-cisalhamento em vigas de CRFA, discutindo a possibilidade de suprimir os reforços convencionais, a saber, barras longitudinais e estribos, e reforçar vigas preeminentemente com fibras de aço. Para alcançar esse propósito, o *software* DOCROS (*Design Of CROss Sections*) será empregado para reproduzir o comportamento à flexão representado pela relação *carga-deslocamento*,  $P-\delta$ , dos experimentos de referência selecionados da literatura. No que se refere ao cisalhamento,

comunica-se que será proposto, com base na análise de um banco de dados, um critério de ruína que descreve a resistência ao cisalhamento em função da deflexão da viga, tal critério de ruína será associado à resposta sob flexão do DOCROS para então analisar a interação entre os esforços. Por fim, noticia-se que especulações serão observadas por meio de análises paramétricas, tendo como pontos reputados a classe de resistência do concreto, o consumo de fibras, e a otimização da inércia das seções transversais das vigas analisadas, essa associação de parâmetros será realizada visando obter a maior supressão possível dos reforços convencionais.

## **1.1 JUSTIFICATIVA**

O CRFA tem sido objeto de estudo em diversas pesquisas recentes, que discutem infindáveis aspectos e aplicações do material, onde destacam-se a dosagem, o preparo, a sua caracterização nos estados fresco e endurecido e a competitividade das fibras de aço ante os mecanismos convencionais de reforço para o concreto armado, o que tem resultado em notável evolução tecnológica do compósito, apesar desse progresso, a aplicação prática do CRFA ainda é limitada por conta da falta de familiaridade com o material, resistência cultural e pela carência de recomendações normativas que garantam o correto dimensionamento e confecção de estruturas complexas. Nesse Contexto o presente trabalho almeja contribuir com o progresso no que diz respeito à utilização de ferramentas e critérios de dimensionamento de vigas em CRFA, ajudando a preencher as lacunas nesse campo e impulsionando o conhecimento sobre a modelagem estrutural desse promissor material.

## **1.2 OBJETIVOS**

### **1.2.1 OBJETIVO GERAL**

Este trabalho tem como objetivo geral estabelecer uma metodologia numérica para analisar a interação flexão-cisalhamento em vigas de concreto armado reforçadas com fibras de aço, discutindo a possibilidade de suprimir os reforços convencionais, a saber, barras longitudinais e estribos, e de reforçar vigas preeminentemente com fibras de aço.

### **1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Avaliar, com base em resultados experimentais, a acurácia da resposta *carga-deslocamento* obtida a partir do DOCROS

- Estabelecer um critério de ruína que descreva a resistência ao cisalhamento em função da deflexão da viga.
- Aquilatar a viabilidade do método proposto enquanto ferramenta de dimensionamento para vigas em CRFA.
- Estabelecer um modelo de Lei constitutiva para o comportamento à tração que represente de forma adequada tanto o concreto simples quanto o concreto reforçado com fibras de aço.
- Desenvolver um algoritmo prático e assertivo para estimar as resistências residuais características do CRFA, tornando o processo de dimensionamento menos dependente de ensaios de caracterização.
- Realizar análises paramétricas com base no modelo proposto.

### **1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO**

O presente documento foi redigido visando atender as recomendações estabelecidas pela ABNT NBR 14724 (2011) e do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGEC) da Universidade Federal do Pará (UFPA), e, portanto, suas informações foram divididas em elementos pré-textuais, textuais e pós-textuais. Para os elementos textuais foram estabelecidos os seguintes capítulos.

**CAPÍTULO 1:** Introduz a problemática da pesquisa e sua relevância, e adicionalmente apresenta a justificativa e objetivo do trabalho.

**CAPÍTULO 2:** Diz respeito à revisão bibliográfica, nesse capítulo são apresentados os conceitos teóricos que embasam o trabalho, a saber, visão geral sobre o concreto reforçado com fibras de aço, cisalhamento em vigas de CRFA, Flexão em vigas de CRFA e interação entre os esforços de flexão e cisalhamento em elementos estruturais de concreto.

**CAPÍTULO 3:** Nesta seção será abordada a metodologia empregada para estudar o comportamento à flexão de vigas tanto em CRFA como em CS.

**CAPÍTULO 4:** Neste momento será apresentada a proposta do critério de ruína para avaliar o comportamento de vigas solicitadas por esforço cortante confeccionadas em CRFA ou CS.

**CAPÍTULO 5:** Apresenta o amalgama entre as metodologias apresentadas nos capítulos 3 e 4, resultando em uma ferramenta para análise global da interação entre os esforços de flexão e cisalhamento em elementos de viga.

**CAPÍTULO 6:** Demostra o emprego da metodologia tema da dissertação em análises paramétricas, visando avaliar a possibilidade de suprimir os reforços convencionais, a saber, barras longitudinais e estribos, e reforçar vigas majoritariamente com fibras de aço.

**CAPÍTULO 7:** Apresenta as principais conclusões auferidas ao longo da presente investigação.

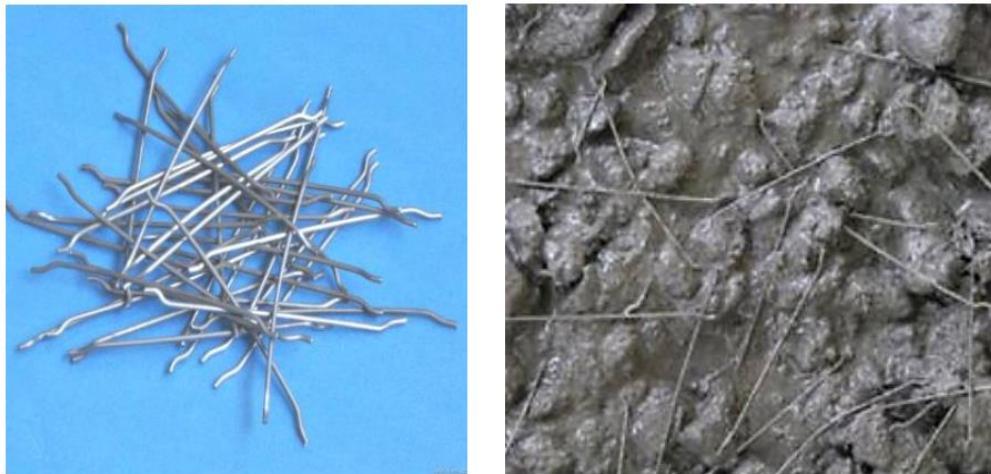
Por fim, com relação aos elementos pós-textuais, tem-se a apresentação das referências bibliográficas utilizadas como diretrizes para a corrente pesquisa, finalizando com a apresentação dos anexos, os quais mostram de forma detalhada informações gerais (bancos de dados utilizados na análise das resistências residuais características do CRFA e no desenvolvimento do critério de ruína por cisalhamento) que foram resumidamente apresentadas ao longo do trabalho.

## **2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

### **2.1 O CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO**

O FIB MODEL CODE 10 (2012) define CRFA como o material compósito que se caracteriza por uma matriz cimentícia com fibras discretas e descontínuas de aço, enquanto o ACI 318 (2014) o define como: Concreto contendo uma determinada quantidade de fibras descontínuas de aço dispersas e orientadas de forma aleatória. Consultando as informações encontradas nos supraditos códigos, reporta-se que o uso de fibras de aço no concreto possibilita uma série de vantagens em relação ao concreto simples, as quais se destacam o melhor comportamento à compressão, à tração, à flexão, ao cisalhamento, à fadiga, ao impacto, ductilidade, melhores condições de confinamento para as armaduras, maior impermeabilidade e melhor controle sobre a retração e fissuração, o que aprimora a durabilidade. No que se refere ao aspecto do material apresenta-se a Figura 2 que ilustra as fibras de aço e o CRFA.

Figura 2. Aparência da fibra de aço e do CRFA.



a) Fibra de aço

b) Concreto com fibras de aço

Fonte: LAM *et al.* (2019).

Figura 3. Construção da *Rocca Tower* em *Tallinn/Estônia*.



Fonte: DESTRÉE *et al.* (2009).

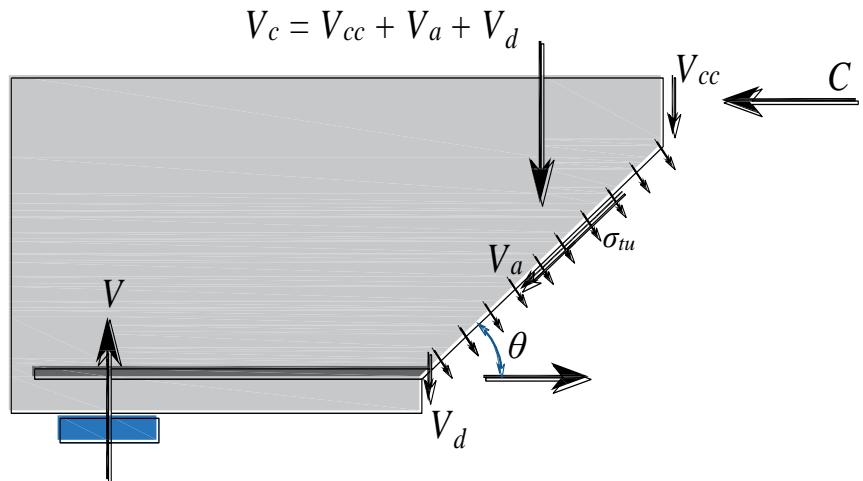
Prosseguindo com os comentários sobre os benefícios da adição de fibras de aço ao concreto, LAM *et al* (2019) comenta que vigas tem significativa redução na deflexão, e que a carga correspondente ao surgimento das primeiras fissuras pode ter um incremento de 40% com a utilização do reforço. No que se refere à aplicação do CRFA em estruturas, o destaque fica para o sistema *TAB-Slab*, sistema que consiste em lajes lisas (lajes apoiadas diretamente sobre os pilares) cujo reforço principal é composto exclusivamente por fibras de aço, o único reforço

convencional fica localizado no alinhamento dos pilares, pois as lajes lisas exigem um reforço que minimize os efeitos de um possível colapso progressivo. Este modelo estrutural já foi empregado em estruturas de grande porte, como demonstrado por DESTRÉE e MANDL (2008) e DESTRÉE *et al.* (2009), para ilustrar uma dessas construções, apresenta-se a Figura 3, que mostra em detalhes o edifício *Rocca Tower* durante sua fase construtiva na cidade de *Tallinn/Estônia*.

## 2.2 CISALHAMENTO EM VIGAS DE CRFA

Ao consultarmos a literatura disponível, é possível constatar que as fibras de aço se qualificam como alternativa aos tradicionais estribos enquanto reforço ao cisalhamento em vigas de CA conforme relatado pelo ACI 544.1R (1996), adicionalmente comenta-se que TUNG e TUE (2018) estudaram o comportamento de vigas em CRFA sem estribos, e informam que o mecanismo proporcionado pelas fibras atua por meio da tensão de tração residual  $\sigma_{tu}$  localizada na superfície da fissura inclinada, conforme ilustrado na Figura 4.

Figura 4. Mecanismo de resistência ao cisalhamento de vigas em CRFA sem estribos.



Fonte: TUNG e TUE (2018).

A força resultante dessa tensão é a componente de contribuição da fibra  $V_{fib}$ ,  $V_a$  é a contribuição vinda do engrenamento do agregado,  $V_{cc}$  indica a componente do concreto comprimido,  $V_d$  denota o efeito pino proporcionado pela armadura longitudinal e  $\theta$  representa o ângulo de inclinação da fissura de tração por cisalhamento. Com base nesse modelo físico a resistência ao cisalhamento de vigas em concreto reforçado com fibras de aço sem estribos,  $V_{frc}$ , pode ser escrita da seguinte maneira:

$$V_{frc} = V_c + V_{fib} \quad \text{Eq. 1}$$

Onde  $V_c$  representa a contribuição total do concreto e é escrita da seguinte forma:

$$V_c = V_{cc} + V_a + V_d \quad \text{Eq. 2}$$

Nos itens subsequentes serão apresentados em mais detalhes, trabalhos que nortearam a presente pesquisa no que tange ao estudo do cisalhamento em Vigas de CRFA.

### 2.2.1 AOUDE *et al.* (2012)

Neste estudo os autores investigaram a influência das fibras de aço na resistência ao cisalhamento de vigas de concreto, no mecanismo de ruína e no controle da fissuração, nesse contexto foram confeccionados 9 espécimes divididos em 3 séries contendo 3 vigas cada, denominadas de séries A, B e BF, onde cada série possui uma viga de referência, sem fibras, e duas em CRFA. A Tabela 1 exprime as informações gerais das vigas, ao passo que as Figuras 5 e 6 detalham, respectivamente, as dimensões das vigas e suas seções transversais. Foram praticados dois consumos de fibras, 0,5% e 1,0 %, a fibra manuseada foi do tipo *hooked-end* com tensão de ruptura de 1100 MPa, comprimento  $l_f = 30$  mm, diâmetro  $d_f = 0,55$  mm e fator de forma  $l_f/d_f = 55$ .

Tabela 1. Informações básicas das vigas de AOUDE *et al.* (2012).

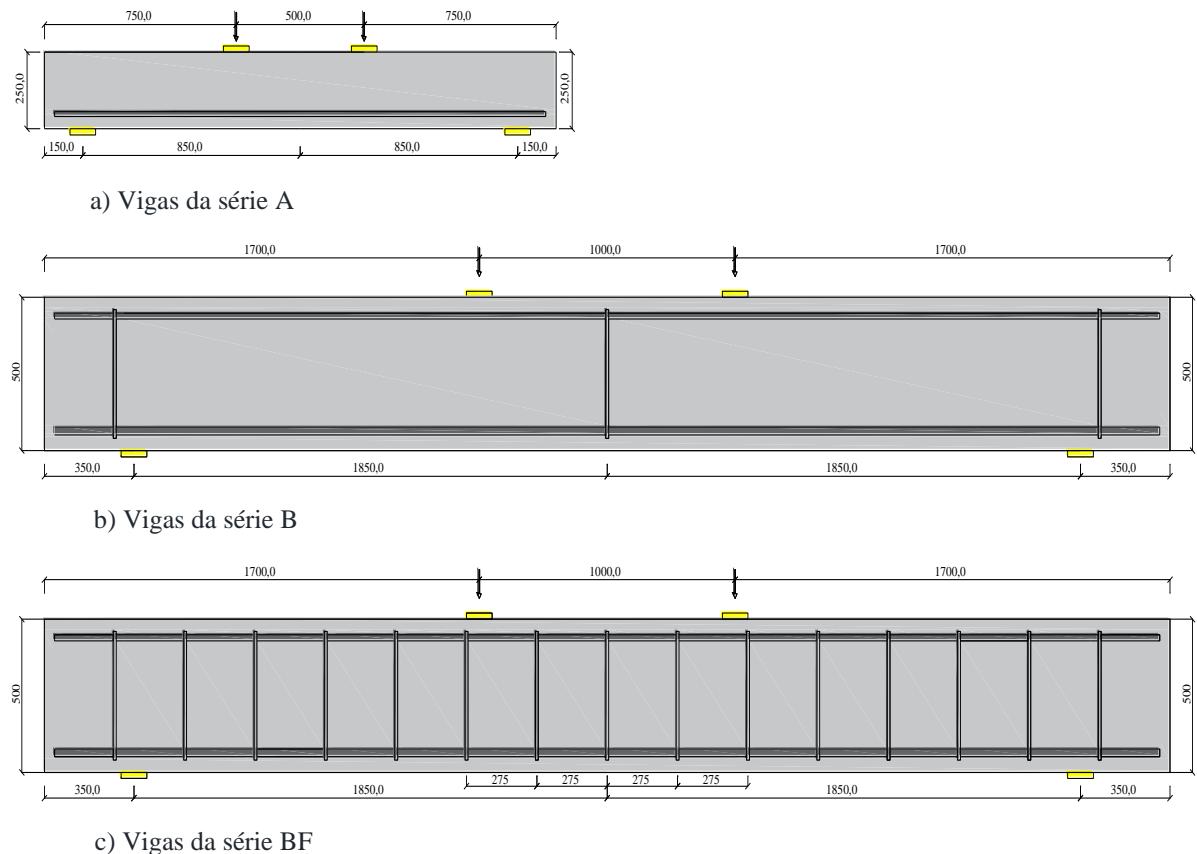
Viga	$b$ (mm)	$h$	$d$	$d'$	$f_c$ (MPa)	$\rho_{l,t}$ (%)	$\rho_{l,c}$ (%)	$\rho_w$ (%)	$C_f$ (%)
A0%	150	250	202	-	23,30	1,32	0,0	0,0	0,00
A0,5%	150	250	202	-	21,30	1,32	0,0	0,0	0,50
A1%	150	250	202	-	19,60	1,32	0,0	0,0	1,00
B0%	300	500	437	60	23,30	1,53	0,46	0,0	0,00
B0,5%	300	500	437	60	21,30	1,53	0,46	0,0	0,50
B1%	300	500	437	60	19,60	1,53	0,46	0,0	1,00
BF0%	300	500	437	60	23,30	1,53	0,46	0,24	0,00
BF0,5%	300	500	437	60	21,30	1,53	0,46	0,24	0,50
BF1%	300	500	437	60	19,60	1,53	0,46	0,24	1,00

Fonte: Adaptado de AOUDE *et al.* (2012).

Com relação aos resultados obtidos, a Figura 7 apresenta as relações *carga-deslocamento* das vigas ensaiadas. Com base na investigação, os autores auferiram as seguintes conclusões: A adição de quantidades moderadas de fibras leva ao aumento da resistência ao cisalhamento em vigas com deficiência na resistência transversal; a adição de uma quantidade suficiente de fibras pode alterar o modo de ruptura de frágil por cisalhamento para dúctil por flexão; as fibras podem melhorar a ductilidade em vigas que contém uma quantidade mínima de armadura transversal

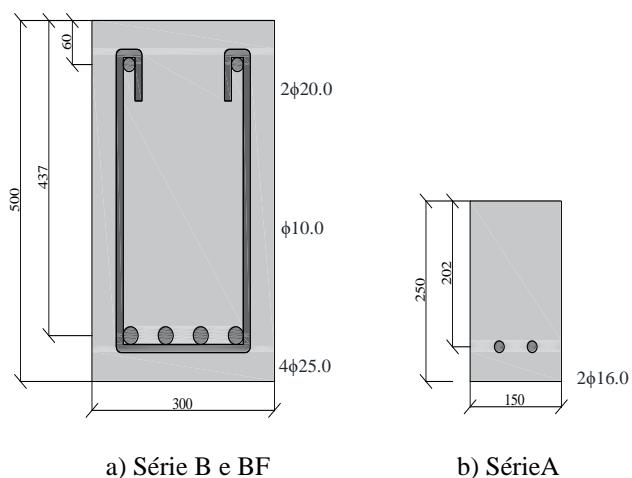
para a qual ocorre o escoamento da armadura longitudinal tracionada, além de também melhorar o controle da fissuração.

Figura 5. Detalhamento das vigas ensaiadas por AOUDE *et al.* (2012).



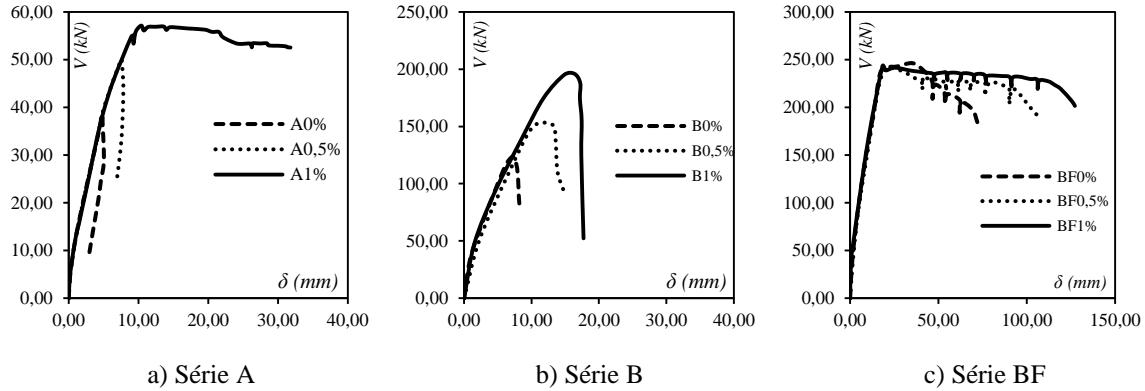
Fonte: AOUDE *et al.* (2012).

Figura 6. Seção transversal das vigas ensaiadas por AOUDE *et al.* (2012).



Fonte: Adaptado de AOUDE *et al.* (2012).

Figura 7. Registro *carga-deslocamento* ( $V-\delta$ ) das vigas ensaiadas por AOUDE *et al.* (2012).



Fonte: Adaptado de AOUDE *et al.* (2012).

### 2.2.2 CUCCHIARA *et al.* (2004)

Nesta pesquisa os autores investigaram a influência da quantidade de fibras de aço adicionada na mistura do concreto, do montante de estribos e do vão de corte no comportamento ao cisalhamento e na ductilidade de vigas, para viabilizar o estudo, foram confeccionadas 16 vigas, divididas em duas séries com oito vigas cada, denominadas de séries A e B, na primeira série as vigas foram ensaiadas com a relação  $a/d = 2,8$ , ao passo que na última se observou  $a/d = 2,0$ , vários arranjos de reforço transversal foram estabelecidos: vigas sem reforço, reforçadas apenas com fibras, apenas com estribos e reforço híbrido.

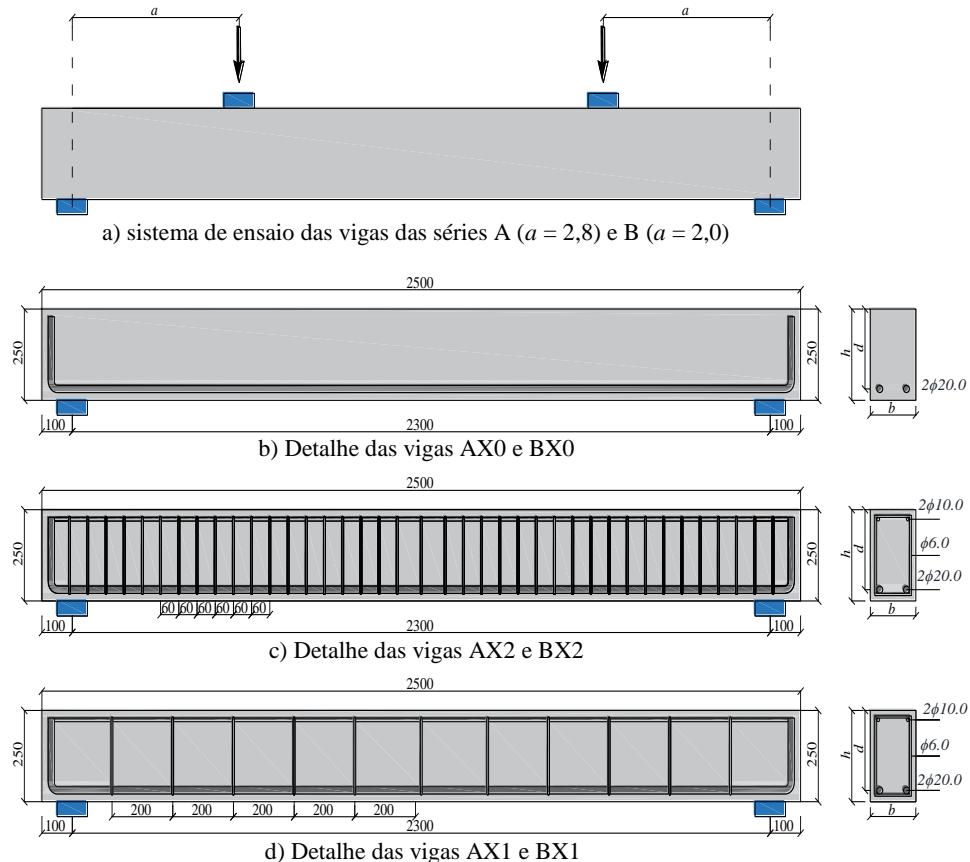
Tabela 2. Informações básicas das vigas de CUCCHIARA *et al.* (2004).

Viga	$f_c$ (Mpa)	$b$ (mm)	$h$ (mm)	$d$ (mm)	$d'$ (mm)	$a/d$	$\rho_{l,t}$ (%)	$\rho_{l,c}$ (%)	$\rho_w$ (%)	$C_f$ (%)
A00	41,20	150,00	250,00	219,00	-	2,80	1,91	-	-	-
A01	41,20	150,00	250,00	219,00	26,00	2,80	1,91	0,48	0,19	-
A02	41,20	150,00	250,00	219,00	26,00	2,80	1,91	0,48	0,63	-
A10	40,85	150,00	250,00	219,00	-	2,80	1,91	-	-	1,00
A20	43,23	150,00	250,00	219,00	-	2,80	1,91	-	-	2,00
A11	40,85	150,00	250,00	219,00	26,00	2,80	1,91	0,48	0,19	1,00
A21	43,23	150,00	250,00	219,00	26,00	2,80	1,91	0,48	0,19	2,00
A12	40,85	150,00	250,00	219,00	26,00	2,80	1,91	0,48	0,63	1,00
B00	41,20	150,00	250,00	219,00	-	2,00	1,91	-	-	-
B01	41,20	150,00	250,00	219,00	26,00	2,00	1,91	0,48	0,19	-
B02	41,20	150,00	250,00	219,00	26,00	2,00	1,91	0,48	0,63	-
B10	40,85	150,00	250,00	219,00	-	2,00	1,91	-	-	1,00
B20	43,23	150,00	250,00	219,00	-	2,00	1,91	-	-	2,00
B11	40,85	150,00	250,00	219,00	26,00	2,00	1,91	0,48	0,19	1,00
B21	43,23	150,00	250,00	219,00	26,00	2,00	1,91	0,48	0,19	2,00
B12	40,85	150,00	250,00	219,00	26,00	2,00	1,91	0,48	0,63	1,00

Fonte: Adaptado de CUCCHIARA *et al.* (2004).

A Tabela 2 detalha as informações gerais das vigas ensaiadas por CUCCHIARA *et al.* (2004), enquanto a Figura 8 apresenta o detalhamento dos elementos estruturais, adicionalmente informa-se que a fibra utilizada apresenta conformação *hooked-end*, tensão resistente de 1115 MPa, comprimento  $l_f = 30$  mm, diâmetro  $d_f = 0,5$  mm, resultando em um fator de forma  $l_f/d_f = 60$ , foram praticados dois consumos percentuais, 1% e 2%.

Figura 8. Detalhamento das vigas de CUCCHIARA *et al.* (2004).

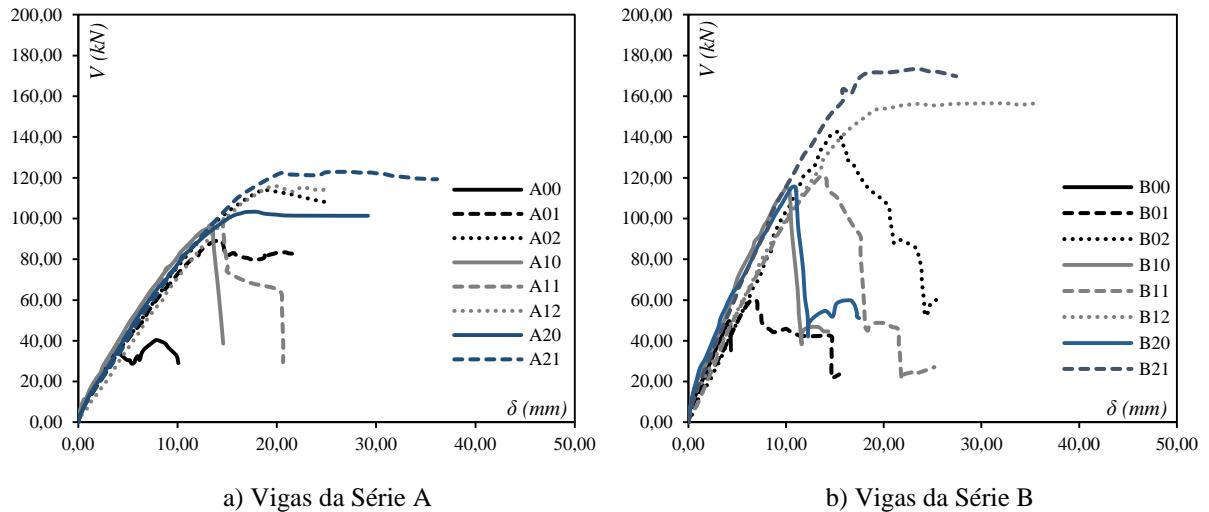


Fonte: Adaptado de CUCCHIARA *et al.* (2004).

Com relação aos resultados obtidos, a Figura 9 apresenta o registro *carga-deslocamento* das vigas, e, com base nessas observações os autores auferiram as seguintes conclusões: Nas vigas reforçadas com fibras foi observado um processo de fissuração mais progressivo, no entanto, com uma menor abertura das fissuras; é possível obter performance equivalente em termos de resistência ao cisalhamento usando fibras de aço em dosagens adequadas ao invés de estribos, apesar de um arranjo híbrido de reforço ser mais indicado, pois os estribos permitem uma maior capacidade de deformação após a fase de comportamento elástico; a inclusão de fibras em quantidade adequada na mistura pode mudar o modo de ruína de frágil por cisalhamento para

dúctil por flexão, confirmando a possibilidade de usar as fibras de aço para garantir a ductilidade da viga ao invés de aumentar a taxa de reforço transversal.

Figura 9. Registro *Carga-deslocamento* ( $V-\delta$ ) das vigas de CUCCHIARA *et al.* (2004).



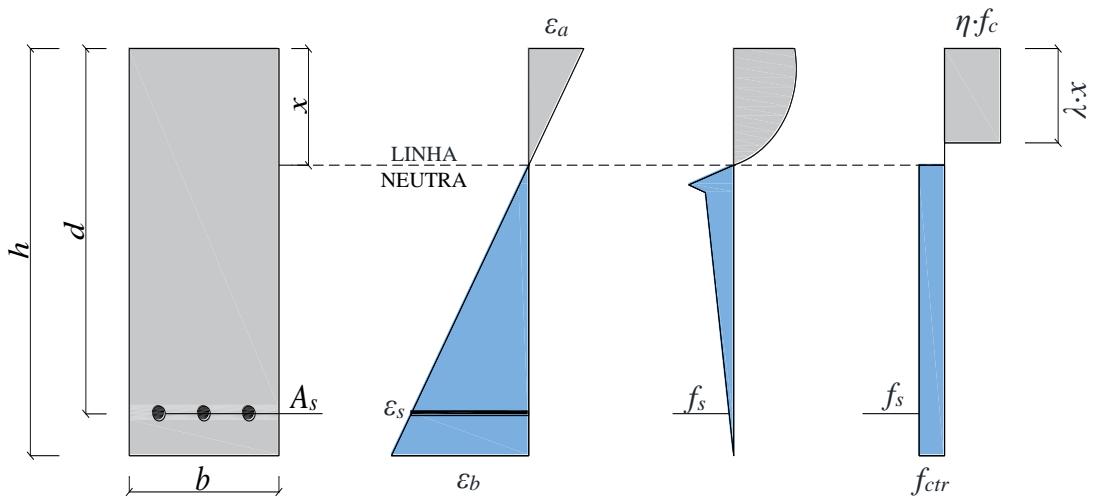
Fonte: Adaptado de CUCCHIARA *et al.* (2004).

### 2.3 FLEXÃO EM VIGAS DE CRFA

O comportamento à flexão de vigas em CRFA foi investigado por diversos autores, sendo que HENAGER e DOHERTY (1976) foram pioneiros em propor um modelo analítico para calcular a resistência à flexão desses elementos, a proposta dos autores é apresentada na Figura 10. Posteriormente esse modelo foi incorporado ao FIB MODEL CODE 10 (2012), e já foi amplamente usado em estudos experimentais que consideraram diferentes parâmetros do material e propriedades geométricas das peças, *verbi gratia*, BARROS (2015), OH (1992) e ZIJL e MBEWE (2013).

No modelo apresentado na Figura 10 a viga pode atingir a ruína de três modos diferentes: (1) esmagamento do concreto comprimido, (2) ruptura por tração da armadura de flexão e (3) ruptura do concreto na região tracionada. E para simplificar o processo, é utilizado um diagrama de corpo livre assingelado que substitui as distribuições de tensões reais por blocos de tração e compressão aproximados, o cálculo do momento resistente é feito de modo interativo compatibilizando as deformações até atingir o equilíbrio interno. Sequencialmente serão apresentados trabalhos que contribuíram para a compreensão do fenômeno da flexão de vigas em CRFA e para o desenvolvimento do presente documento.

Figura 10. Modelo analítico para prever a resistência à flexão de vigas em CRFA.



Fonte: Adaptado de CARDOSO *et al.* (2018).

### 2.3.1 KAKLAUSKAS *et al.* (2014)

Nesta pesquisa, os autores investigaram o papel das fibras de aço na resistência à flexão de vigas, destarte 12 vigas foram confeccionadas e divididas em duas séries distintas, S3 e S2, que se distinguem primariamente pela taxa de armadura longitudinal, 0,3% (3φ10) e 0,6% (3 φ 14) respectivamente, a Tabela 3 exprime as informações gerais das vigas, ao passo que a Figura 11 apresenta o detalhamento dos espécimes. A fibra manuseada foi do tipo *hooked-end* com tensão resistente de 1020 MPa, comprimento  $l_f = 53$  mm, diâmetro  $d_f = 1$  mm, resultando em fator de forma  $l_f/d_f = 53$ , o consumo praticado oscilou entre 0,0% e 1,5%.

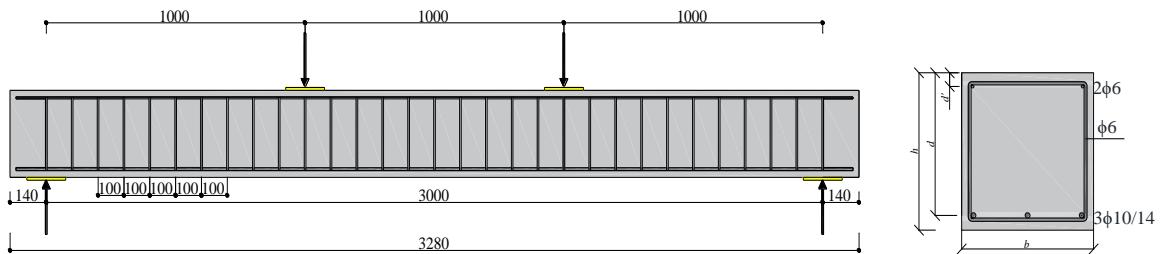
Tabela 3. Informações básicas das vigas de KAKLAUSKAS *et al.* (2014).

Viga	$f_c$ (MPa)	$b$ (mm)	$h$ (mm)	$d$ (mm)	$d'$	$\rho_{l,t}$ (%)	$\rho_{l,c}$ (%)	$\rho_w$ (%)	$C_f$ (%)
S3-2-3	50,90	284	298	271	32	0,30	0,08	0,20	0,00
S3-2-6	50,90	279	303	277	49	0,30	0,08	0,20	0,00
S2-3	48,10	272	300	282	29	0,60	0,08	0,20	0,00
S3-1-F05	55,60	278	302	278	29	0,30	0,08	0,20	0,47
S3-2-F05	55,60	283	303	279	26	0,30	0,08	0,20	0,47
S3-1-F10	48,00	279	300	276	23	0,30	0,08	0,20	1,02
S3-2-F10	48,00	284	301	275	25	0,30	0,08	0,20	1,02
S3-1-F15	52,20	279	300	272	26	0,30	0,08	0,20	1,46
S3-2-F15	52,20	285	299	273	23	0,30	0,08	0,20	1,46
S2-F05	55,60	273	301	286	25	0,60	0,08	0,20	0,47
S2-F10	48,00	272	301	283	22	0,60	0,08	0,20	1,02
S2-F15	52,20	272	299	284	23	0,60	0,08	0,20	1,46

Fonte: Adaptado de KAKLAUSKAS *et al.* (2014).

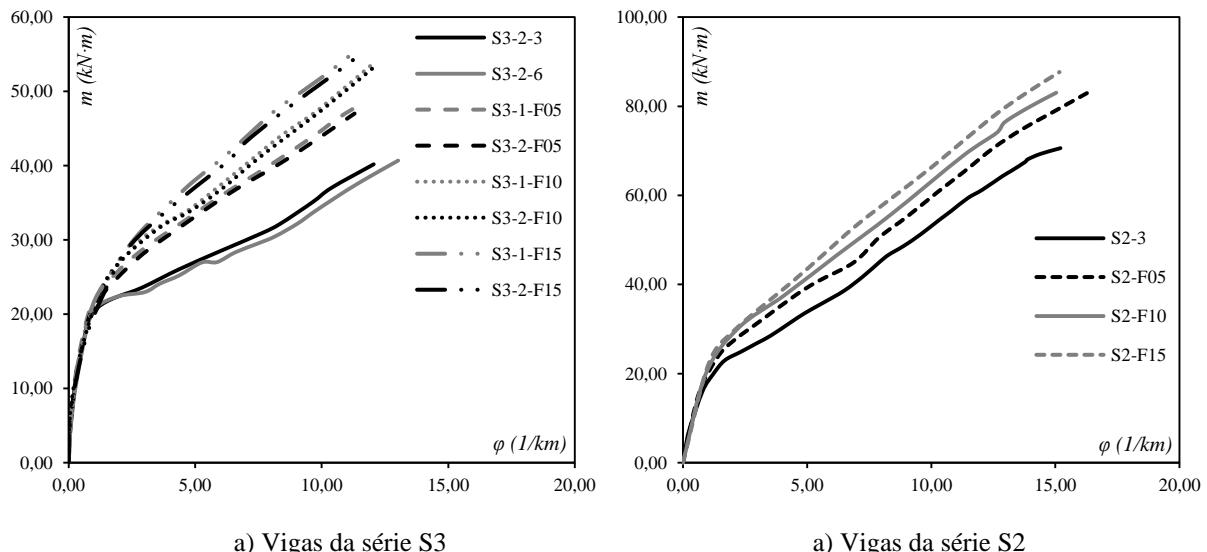
Com relação aos resultados, os autores viabilizaram o registro *momento-curvatura* das vigas, conforme apresentado na Figura 12, onde é possível observar que os dados foram coletados até o ponto próximo de ocorrer o escoamento, importa comentar que nesse trabalho a discussão girou em torno da proposta de um modelo analítico para prever o comportamento de vigas em CRFA em termos de *momento-curvatura*, nesse contexto a investigação experimental teve um papel auxiliar, com um enfoque secundário e pouco comentado, no entanto ao compulsar os registros obtidos é possível constatar o ganho de resistência na fase após a fissuração dos elementos em CRFA em relação aos espécimes de referência sem fibras.

Figura 11. Detalhamento das vigas estudadas por KAKLAUKAS *et al.* (2014).



Fonte: Adaptado de KAKLAUKAS *et al.* (2014).

Figura 12. Registro momento-curvatura ( $m-\varphi$ ) das vigas de KAKLAUKAS *et al.* (2014).



Fonte: Adaptado de KAKLAUKAS *et al.* (2014).

### 2.3.2 DANCYGIER e SAVIR (2006)

Nesta pesquisa os autores avaliaram o comportamento à flexão de vigas em Concreto de Alta Resistência Reforçado com Fibras de Aço (CARRFA) com baixas taxas de armadura, para

tanto, 11 espécimes foram manufaturados, onde se incluem vigas em concreto de elevada resistência (9 vigas na ordem de 120 MPa) com e sem fibras, nas quais foi praticado um volume de fibras na ordem de 0,75%, assim também como vigas de concreto de resistência normal sem fibras (2 vigas na faixa de 45 MPa), as taxas de reforço longitudinal viabilizadas foram: 0,18%, 0,28% e 0,56%; as vigas foram organizadas em quatro séries conforme o tipo de concreto e arranjo de reforço, a saber, séries N2, H4, H5 e H8, todas as principais informações sobre as vigas estudadas são apresentadas na Tabela 4, ao passo que as Figuras 13 e 14 detalham, respectivamente, os esquemas de ensaio e as seções transversais dos elementos, com relação à fibra manuseada, comunica-se que foram utilizados dois tipos distintos, RC-65/35-BN e RC-65/60-BN, que se distinguem pelo fator de forma, a saber, 64 e 67 respectivamente, e ambas apresentam tensão resistente na faixa de 1000 MPa.

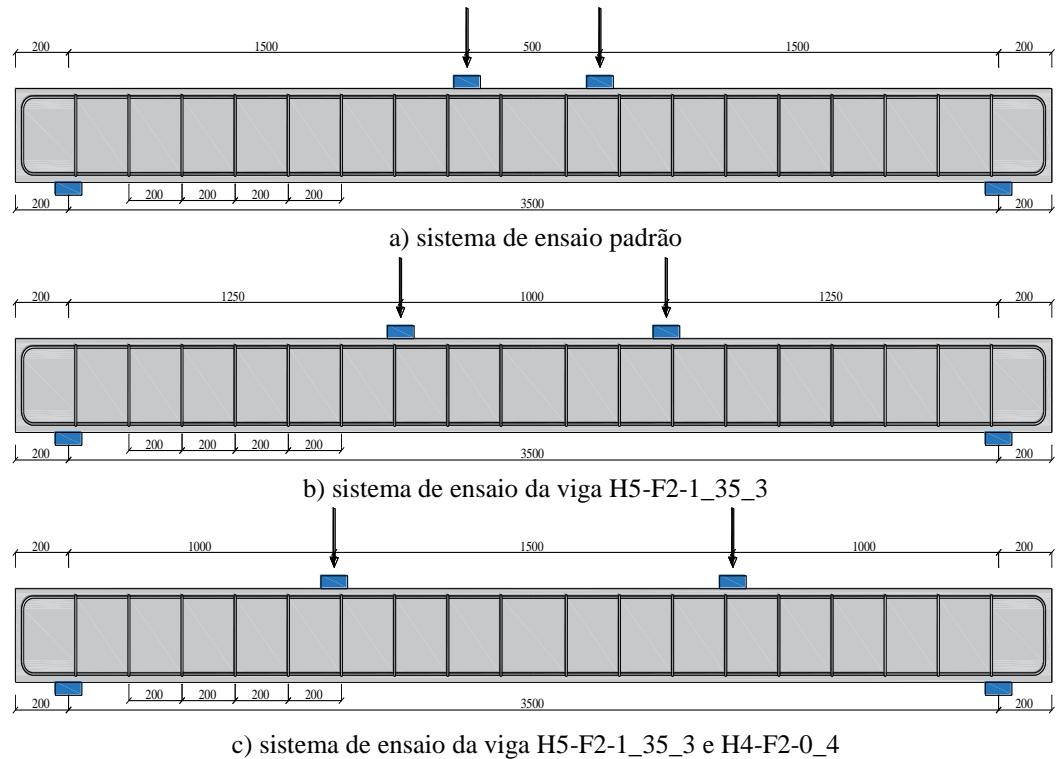
Referente ao resultados, os autores viabilizaram o registro *momento-deslocamento* das vigas, conforme apresentado na Figura 15, foi observado que a adição de fibras em elementos fletidos com taxas mínimas de reforço longitudinal causou um comportamento mais frágil quando comparadas à viga análoga, porém sem fibras, este resultado sugere que a taxa de armadura longitudinal em vigas em CARRFA deve ser maior do que a preconizada para elementos convencionais, visando manter um nível adequado de ductilidade.

Tabela 4. Informações básicas das vigas de DANCYGIER e SAVIR (2006).

Viga	$f_c$ (MPa)	$b$ (mm)	$h$ (mm)	$d$ (mm)	$\rho_{l,t}$ (%)	$a$ (mm)	<i>Tipo de Fibra</i>	$C_f$ (%)
N2-F2-0_1	45,10	200,00	300,00	273,00	0,18	1500,00	-	0,00
N2-F2-0_2	45,10	200,00	300,00	273,00	0,18	1500,00	-	0,00
H4-F2-0_1	120,50	200,00	300,00	273,00	0,28	1500,00	-	0,00
H4-F2-0_2	114,60	200,00	300,00	273,00	0,28	1500,00	-	0,00
H5-F2-1_35	129,40	200,00	300,00	273,00	0,28	1500,00	RC-65/35-BN	0,75
H5-F2-1_60	123,60	200,00	300,00	273,00	0,28	1500,00	RC-65/60-BN	0,75
H8-F2-1_35	124,40	200,00	300,00	273,00	0,56	1500,00	RC-65/35-BN	0,75
H8-F2-1_60	122,00	200,00	300,00	273,00	0,56	1500,00	RC-65/60-BN	0,75
H4-F2-0_4	118,00	200,00	300,00	273,00	0,28	1000,00	-	0,00
H5-F2-1_35_3	121,80	200,00	300,00	273,00	0,28	1250,00	RC-65/35-BN	0,75
H5-F2-1_35_4	121,80	200,00	300,00	273,00	0,28	1000,00	RC-65/35-BN	0,75

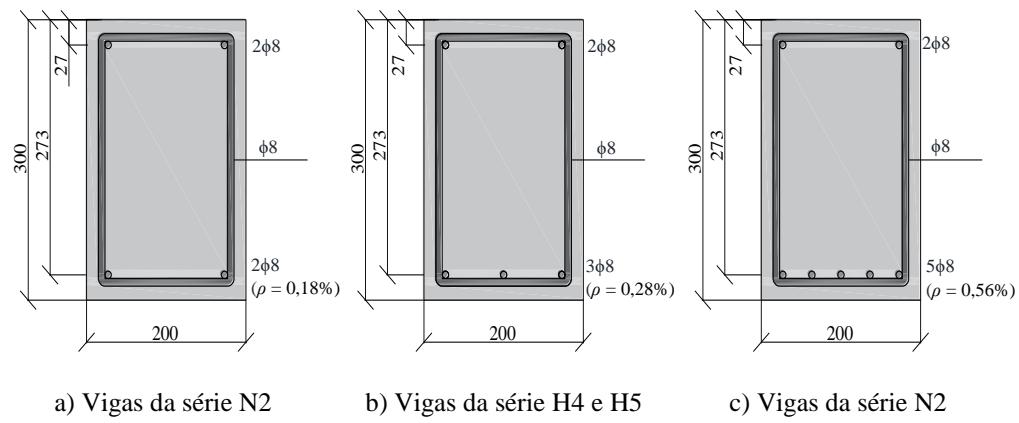
Fonte: Adaptado de DANCYGIER e SAVIR (2006).

Figura 13. Detalhamento das vigas de DANCYGIER e SAVIR (2006).



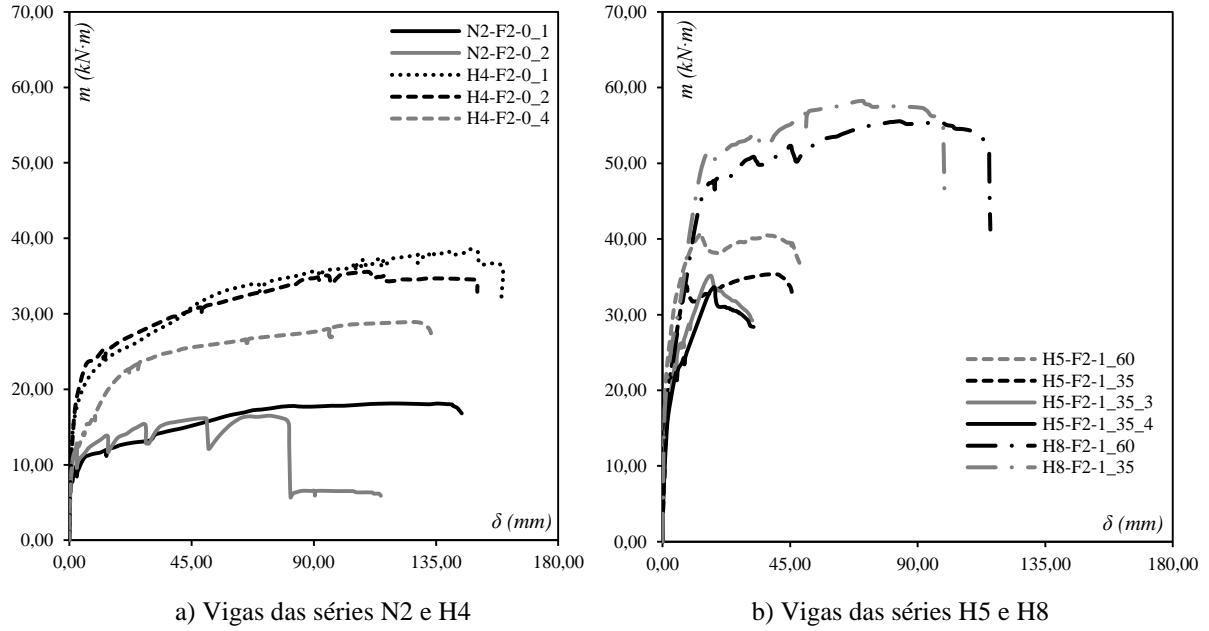
Fonte: Adaptado de DANCYGIER e SAVIR (2006).

Figura 14. Seção transversal das vigas de DANCYGIER e SAVIR (2006).



Fonte: Adaptado de DANCYGIER e SAVIR (2006).

Figura 15. Registro *momento-deslocamento* ( $m-\delta$ ) das vigas de DANCYGIER e SAVIR (2006).



Fonte: Adaptado de DANCYGIER e SAVIR (2006).

### 2.3.3 CARDOSO *et al.* (2018)

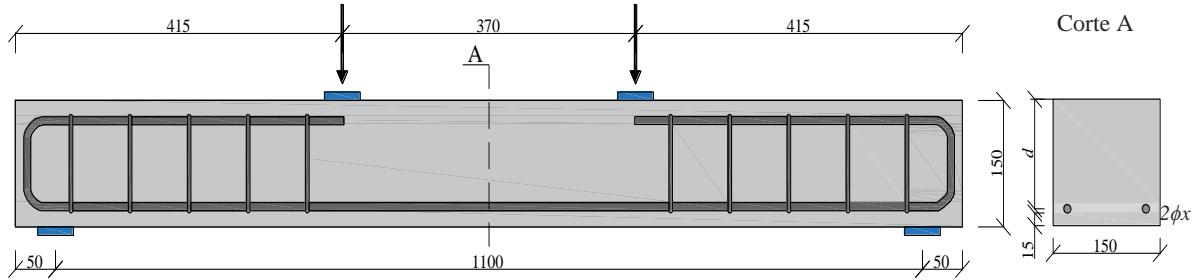
Nesta pesquisa os autores investigaram o comportamento à flexão de vigas em CRFA de alta resistência, para a perscrutação foram confeccionadas 9 vigas com taxas de armadura longitudinal de 0,28%, 0,44% e 0,70%. Foram utilizadas duas fibras *hooked-end* distintas, denominadas RL 45/30 BN e RC 80/60 BN, onde o primeiro e o segundo número que compõem a nomenclatura das fibras indicam, respectivamente, o fator de forma e o comprimento, ambos os tipos apresentam tensão resistente na ordem de 1100 MPa. O consumo volumétrico praticado variou entre 0,0% e 2,0% e o  $f_c$  de 76,30 a 95,20 MPa, a Tabela 5 apresenta as informações gerais das vigas ensaiadas e a Figura 16 o detalhamento.

Tabela 5. Informações básicas das vigas de CARDOSO *et al.* (2018).

Viga	$f_c$ (MPa)	$b$ (mm)	$h$ (mm)	$d$ (mm)	Armadura	$\rho_{l,t}$ (%)	$\rho_w$ (%)	$l_f/d_f$	$C_f$ (%)
B1-0-6	76,30	150	150	131,85	2φ6.3	0,28	0,33	0,00	0,00
B2-0-8	76,30	150	150	131,50	2φ8.0	0,44	0,33	0,00	0,00
B3-0-10	76,30	150	150	130,00	2φ10.0	0,70	0,33	0,00	0,00
B4-0.5/45-10	95,20	150	150	130,00	2φ10.0	0,70	0,33	45,00	0,50
B5-1/45-10	80,20	150	150	130,00	2φ10.0	0,70	0,33	45,00	1,00
B6-2/45-6	81,30	150	150	131,85	2φ6.3	0,28	0,33	45,00	2,00
B7-2/45-8	81,30	150	150	131,00	2φ8.0	0,44	0,33	45,00	2,00
B8-2/45-10	81,30	150	150	130,00	2φ10.0	0,70	0,33	45,00	2,00
B9-2/80-10	84,90	150	150	130,00	2φ10.0	0,70	0,33	80,00	2,00

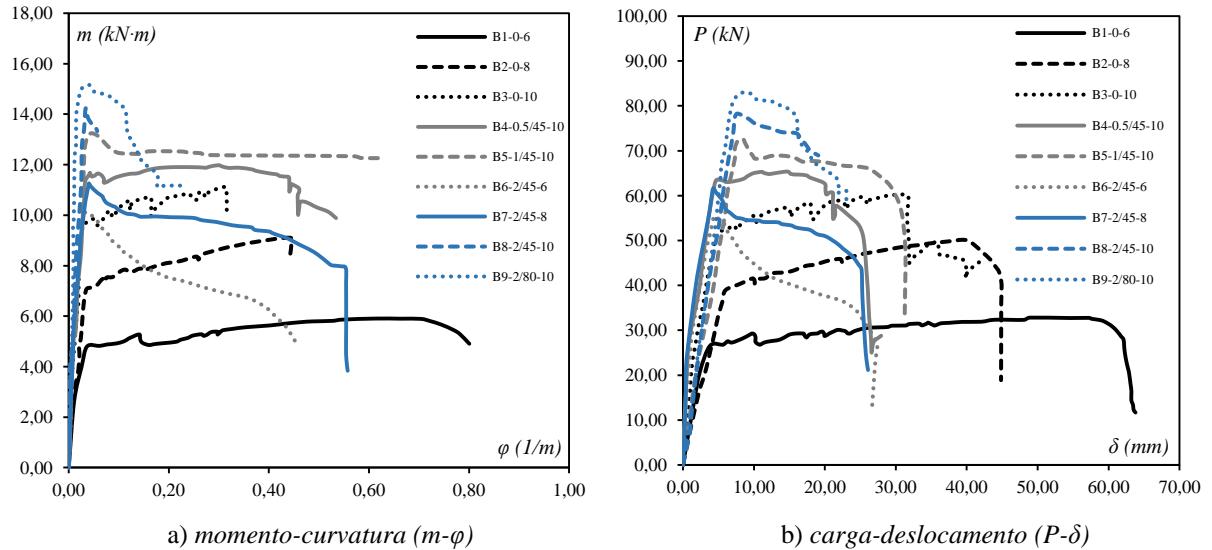
Fonte: Adaptado de CARDOSO *et al.* (2018).

Figura 16. Detalhamento das vigas ensaiadas por CARDOSO *et al.* (2018).



Fonte: Adaptado de CARDOSO *et al.* (2018).

Figura 17. Registros experimentais das vigas ensaiadas por CARDOSO *et al.* (2018).



Fonte: Adaptado de CARDOSO *et al.* (2018).

No que diz respeito aos resultados, a Figura 17 exprime os registros experimentais *momento-curvatura* e *carga-deslocamento*, e como produto da investigação os autores obtiveram as seguintes conclusões:

- Foram observados acréscimos na resistência à flexão de 21 a 109% com o uso das fibras de aço no concreto, os maiores aumentos foram auferidos em vigas com as menores taxas de armadura, nesses elementos as fibras de aço aumentaram significativamente a capacidade de transferência de tensão através das fissuras.
- A rigidez fissurada também foi melhorada com o aumento da quantidade de fibras, também foi observado que o fenômeno de fissura localizada se mostrou mais relevante em vigas com as menores taxas de armadura e maiores consumos de fibra, esse fenômeno leva ao surgimento de uma rótula plástica que reduz a ductilidade da peça.

- No caso de vigas com fibras aço, foi constatado o surgimento de fissuras mais próximas entre si e, após o escoamento, uma fissura crítica se desenvolve mais em relação às outras. Para níveis de tensão superiores a 250 MPa na armadura longitudinal, reduções acima de 93% na abertura das fissuras foram observadas utilizando fibras de aço, essa redução é diretamente proporcional ao consumo de fibras e ao fator de forma.

#### 2.3.4 DANCYGIER e BERKOVER (2016)

Neste trabalho os autores avaliaram o efeito que a adição de fibras de aço à mistura do concreto tem no comportamento à flexão de vigas em concreto armado. Foram conduzidos ensaios em elementos convencionalmente reforçados com diferentes taxas de armadura, com e sem fibras, foram produzidas 25 vigas divididas em 6 séries distintas de acordo com a taxa de reforço longitudinal, 0,15%, 0,39%, 0,63%, 0,94%, 1,26% e 3,27%, a Tabela 6 apresenta as principais informações dos espécimes ensaiados, ao passo que a Figura 18 detalha o esquema de ensaio e a seção transversal das vigas. Foram praticados dois consumos de fibra: 40 kg/m<sup>3</sup> (0,50%) e 60 kg/m<sup>3</sup> (0,76%); o tipo de fibra manipulado foi de conformação *hooked-end*, comprimento  $l_f = 35$  mm, fator de forma na ordem de 64 e tensão resistente de 1345 MPa. Já com relação aos resultados os autores viabilizaram o registro *carga-deslocamento* das vigas, conforme apresentado na Figura 19, como produto da investigação foram auferidas as seguintes conclusões:

- Os resultados mostraram que a aplicação de fibras leva a uma evidente redução na ductilidade em vigas com baixas taxas de armadura ( $\rho < \sim 0,5\%$ ), as taxas de ductilidade de vigas em CRFA apresentaram redução de 50-80% quando comparadas com vigas com a mesma taxa de armadura, porém sem fibras, essas observações sugerem que um novo critério que garanta a ductilidade adequada possa ser necessário para definir a taxa mínima de armadura quando fibras de aço são usadas em elementos fletidos.
- Foi observado o desenvolvimento de uma fissura crítica localizada que gerou a formação de uma rótula plástica nas vigas em CRFA com baixas taxas de armadura, esse mecanismo penalizou a ductilidade desses elementos.
- A capacidade de carga de vigas contendo fibras de aço com taxas de armadura abaixo de 0,50% apresentou aumento acima de 25% quando comparadas ao elemento de referência, sem

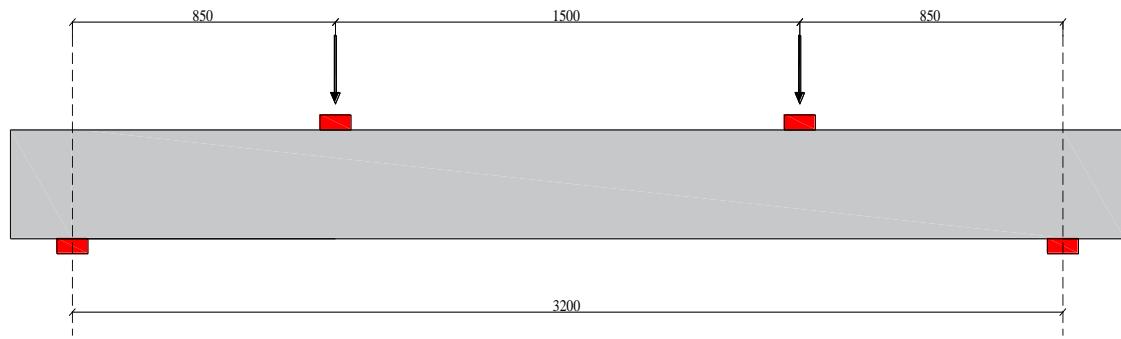
fibras. Já em peças com altas taxas de reforço não foram observadas diferenças significativas entre as vigas contendo fibras e a de referência.

Tabela 6. Informações básicas das vigas de DANCYGIER e BERKOVER (2016).

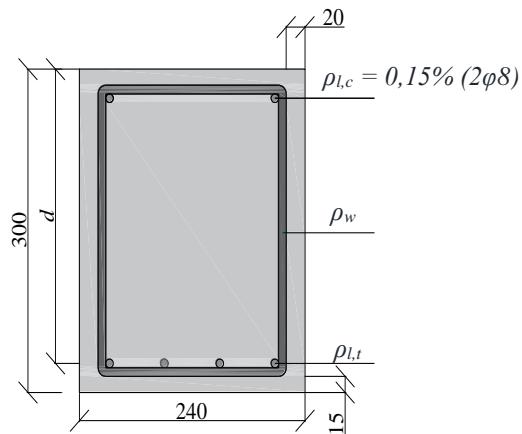
Viga	d (mm)	C <sub>f</sub> (kg/m <sup>3</sup> )	f <sub>c</sub> (MPa)	Reforço Longitudinal					Reforço Transversal					
				ρ (%)	Arranjo	f <sub>xy</sub> (MPa)	f <sub>su</sub> (MPa)	ε <sub>su</sub> (%)	ϕ <sub>w</sub> (mm)	S (mm)	ρ <sub>w</sub> (%)			
NF-0-015-1	273,00	0,00	35,00	0,15	2φ8	508,00	687,00	11,10	8,00	200	0,21			
NF-0-015-2			36,10	0,15										
40-015-1		40,00	35,00	0,15		503,00	676,00	7,00						
40-015-2			34,60	0,15										
NF-1-015-1		60,00	31,70	0,15		508,00	687,00	11,10						
NF-1-015-2			32,70	0,15										
NF-1-015-3			31,10	0,15										
0-039-1	270,00	0,00	35,70	0,39	2φ8 + 2φ10	503 (φ8) 409 (φ10)	676 (φ8) 578 (φ10)	7,00 (φ8) 9,00 (φ10)	10,00	200	0,33			
40-039-1		40,00	36,40	0,39										
40-039-2			35,40	0,39										
60-039-1		60,00	34,80	0,39										
60-039-2			34,90	0,39										
NF-0-063-1	267,00	0,00	34,60	0,63	2φ16	472	557	7,90	10,00	200	0,33			
NF-1-063-1		60,00	32,20	0,63		412	667	12,10						
NF-1-063-2			28,40	0,63										
NF-1-063-3			28,90	0,63										
0-094-1	267,00	0,00	36,20	0,94	3φ16	472	557	7,90	10,00	100	0,65			
60-094-1		60,00	38,20	0,94										
60-094-2			39,00	0,94										
NF-0-126-1	267,00	0,00	33,60	1,26	4φ16	412	667	12,10	10,00	100	0,65			
NF-1-126-1		60,00	35,10	1,26										
NF-1-126-2			33,40	1,26										
NF-0-330-1	242,00	0,00	28,90	3,27	5φ22	412	672	12,50	10,00	75	0,87			
NF-1-330-1		60,00	29,00	3,27										
NF-1-330-2			27,20	3,27										

Fonte: Adaptado de DANCYGIER e BERKOVER (2016).

Figura 18. Detalhamento das vigas estudadas por DANCYGIER e BERKOVER (2016).



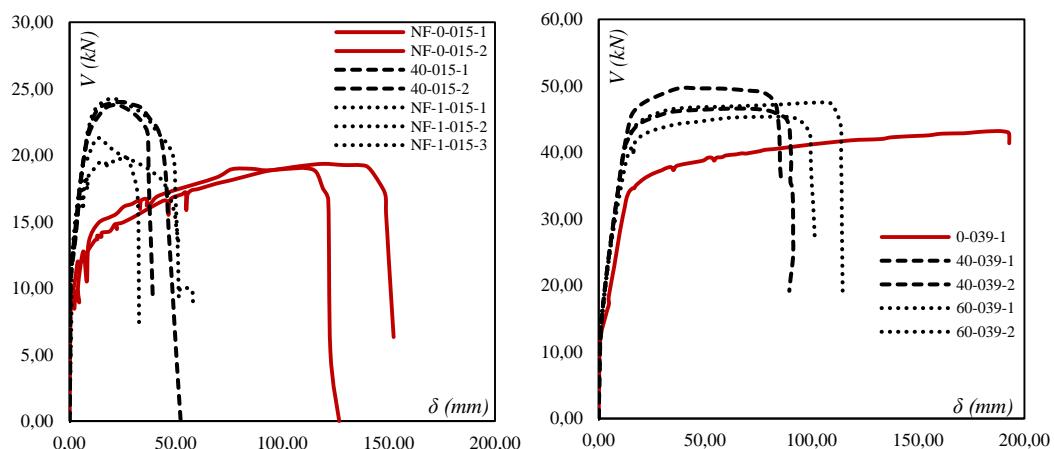
a) Sistema de ensaio das vigas.



b) Seção transversal

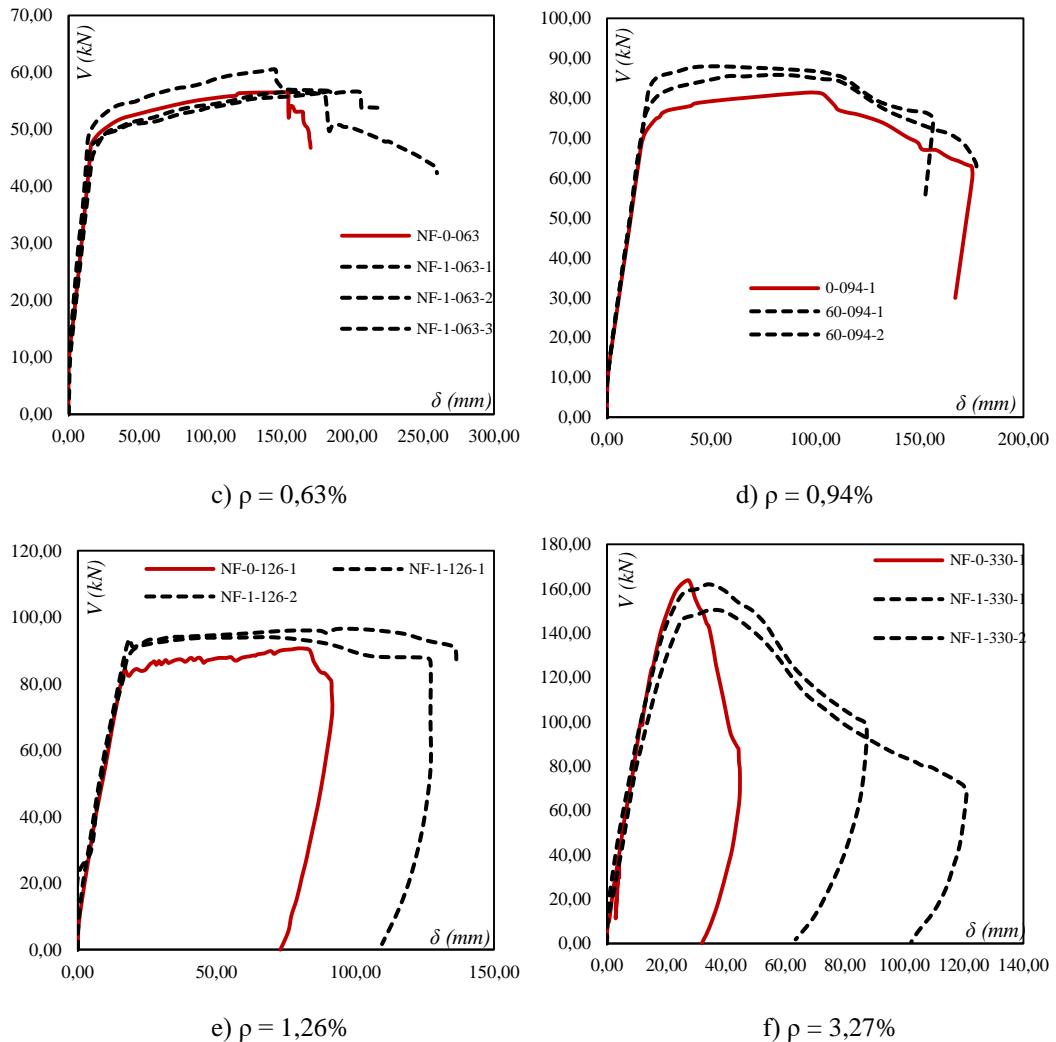
Fonte: Adaptado de DANCYGIER e BERKOVER (2016).

Figura 19. Registro *carga-deslocamento* ( $V-\delta$ ) das vigas de DANCYGIER e BERKOVER (2016).



Fonte: Adaptado de DANCYGIER e BERKOVER (2016).

Figura 19. Registro *carga-deslocamento* ( $V-\delta$ ) das vigas de DANCYGIER e BERKOVER (2016) (Continuação).



Fonte: Adaptado de DANCYGIER e BERKOVER (2016).

## 2.4 INTERAÇÃO FLEXÃO-CISALHAMENTO

Após as explanações sobre flexão e cisalhamento de forma isolada, na presente sessão serão apresentados trabalhos que discutem a interação entre ambos os esforços de forma concomitante em elementos estruturais de concreto, tendo como base investigações experimentais, analíticas e numéricas.

### 2.4.1 IMAN *et al.* (1997)

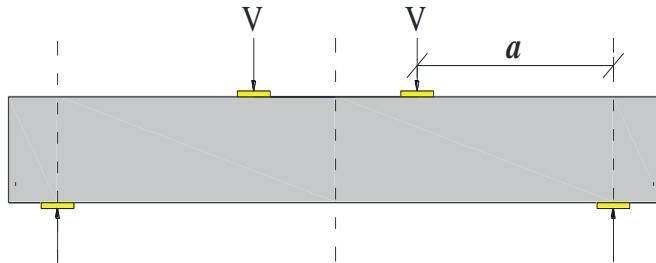
Nesta pesquisa os autores avaliaram a interação entre flexão e cisalhamento em vigas de concreto de alta resistência reforçado com fibras de aço (CARRFA) sem estribos, com base nisso foi proposto um modelo analítico para predição do que foi denominado como Capacidade

Resistente Relativa de Vigas, que é expressa pela razão  $M_u/M_{fl}$ , sendo  $M_u$  o momento correspondente a ruína por cisalhamento e  $M_{fl}$  o momento fletor resistente máximo da peça, o autor também analisou os parâmetros inerentes da viga que influenciam na resistência relativa, tal modelo analítico se baseia nas Equações do ACI 544 (1988), mas com as devidas adaptações para concretos de alta resistência.

O modelo foi verificado com um banco de dados contendo 115 resultados de ensaios experimentais, onde a resistência à compressão do concreto varia de 53 a 140 Mpa, o consumo de fibras de 0,0 a 1,5%, e a razão  $a/d$  entre 1,5 e 6. Durante a investigação o autor constatou que o valor de  $M_u/M_{fl}$  é afetado pela combinação de vários parâmetros, a saber,  $\rho$ ,  $F$ ,  $a/d$ ,  $f_c$ ,  $f_{sy}$ ,  $d$  e  $d_a$ , onde  $F$ , denominado de fator fibra, é uma grandeza que depende das propriedades geométricas da fibra e de seu consumo e  $d_a$  é o diâmetro do agregado. Os ensaios analisados na perscrutação seguem o esquema exposto na Figura 20, comenta-se ainda que o momento interno  $M_u$  é determinado igualando-o ao momento externo conforme escrito na Equação 3, onde  $V_u$  é a força cortante última resistida pela viga.

$$M_u = V_u \cdot a \quad \text{Eq. 3}$$

Figura 20. Sistema de ensaios das vigas analisadas por IMAN *et al.* (1997).



Fonte: Adaptado de IMAN *et al.* (1997).

Por meio da investigação do efeito da interação entre diferentes parâmetros é possível determinar o tipo adequado e a quantidade otimizada de materiais que nos proporciona  $M_u/M_{fl}=1,0$  e que consequentemente contorna inteiramente o problema do cisalhamento, outra possibilidade do método é verificar qual o domínio de ruína da viga, compressão da biela, tração diagonal ou ruptura por flexão.

Sobre como diferentes fatores influenciam no comportamento mecânico, foi observado que  $F$  e  $f_c$  são diretamente proporcionais à  $M_u/M_{fl}$ , ao passo que  $\rho$  e  $f_{sy}$  são inversamente proporcionais. Para avaliar a sensibilidade de  $M_u/M_{fl}$  pela variação de diferentes parâmetros, foi apresentado o

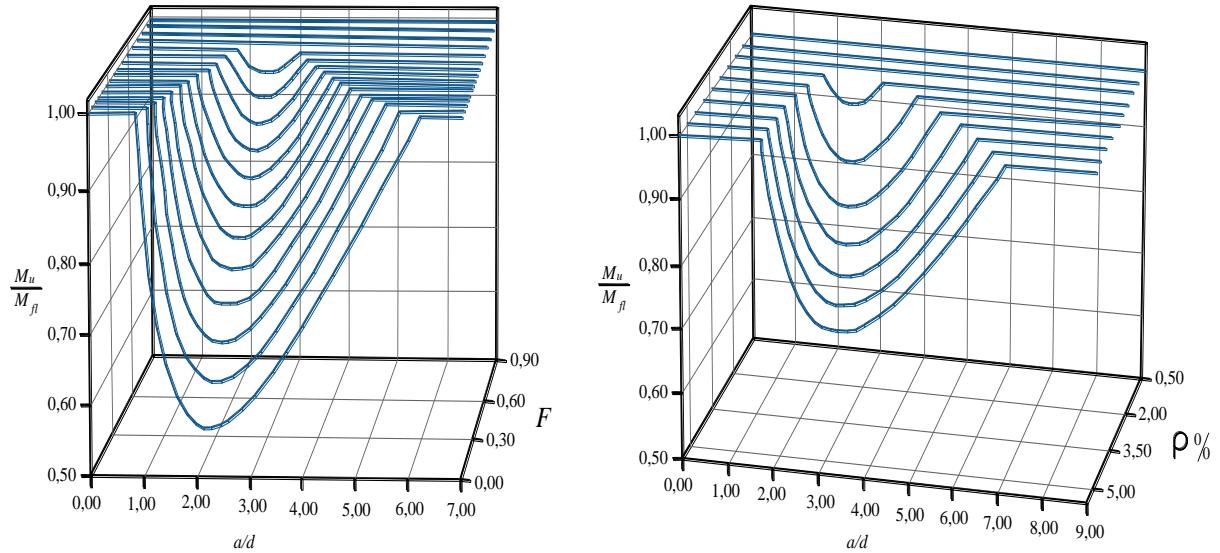
seguinte exemplo. São dados:  $f_c = 110$  Mpa,  $f_{sy} = 550$  Mpa,  $\rho = 0,03$ ,  $F = 0,3$ ,  $a/d = 2,5$ ,  $d = 300$  mm e  $d_a = 14$  mm. O valor de  $M_u/M_{fl}$  foi calculado quando um dos parâmetros é alterado em 50% enquanto os outros permanecem constantes. Os resultados resumidos na Tabela 7 mostram que  $M_u/M_{fl}$  é fortemente influenciado pela mudança de  $f_y$  e  $a/d$ , ao passo que  $f_c$  e  $d$  ( $a/d =$  constante) tem efeito relativamente menor em  $M_u/M_{fl}$ , já  $F$  e  $\rho$  afetam consideravelmente o momento relativo enquanto  $d_a$  tem efeito desprezível, a Figura 21 também mostra o comportamento gráfico da resistência relativa em função de diferentes parâmetros.

Tabela 7. Análise da Influência de diversos parâmetros na Resistência Relativa ( $M_u/M_{fl}$ ).

<b>Parâmetro</b>	<b>Variável</b>		<b><math>M_u/M_{fl}</math></b>		
	<b>De</b>	<b>Para</b>	<b>De</b>	<b>Para</b>	<b>Variação (%)</b>
$f_c$	80,00	120,00 Mpa	0,678	0,709	+4,5
$f_y$	400,00	500,00 Mpa	0,930	0,649	-30,2
$\rho$	0,02	0,03	0,802	0,700	-12,7
$F$	0,40	0,60	0,766	0,887	+15,7
$a/d$	1,50	2,25	0,936	0,720	-23,0
	3,50	5,25	0,716	0,882	+23,2
$d$	240,00	360,00 mm	0,735	0,670	-8,8
$d_a$	1,50	1,50 mm	0,700	0,709	+1,2

Fonte: Adaptado de IMAN et al. (1997).

Figura 21. Representação gráfica da relação entre  $M_u/M_{fl}$  e outros parâmetros.



Fonte: Adaptado de IMAN et al. (1997).

Em seu tentame o autor concluiu, dentre outras coisas, que a inclusão de fibras de aço em vigas em concreto de elevada resistência sem estribos resulta em um aumento significante na

resistência ao cisalhamento e tende a aumentar o Momento resistente último ( $M_u$ ) afim de alcançar o momento resistente nominal ( $M_{fl}$ ). As fibras de aço podem substituir de forma eficiente o reforço tradicional, estribos, enquanto que o uso de fibras de aço como reforço complementar às barras longitudinais não tem efeito considerável.

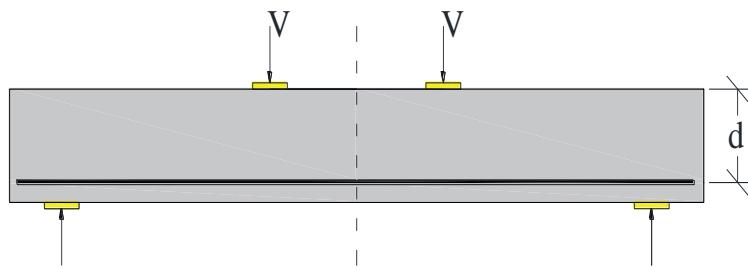
#### 2.4.2 MUTTONI e SCHWARTZ (1991)

Neste estudo os autores investigam o mecanismo de ruina por cisalhamento em vigas e lajes sem armadura transversal, também são discutidos os principais parâmetros que influenciam no comportamento estrutural. Como resultado da investigação, é proposto um modelo teórico para determinação da resistência à punção de lajes em função de diferentes parâmetros.

No que se refere ao estudo de vigas verificou-se que a resistência ao cisalhamento depende da capacidade que a viga apresenta de transferir esforços através das fissuras, por se tratar de vigas sem armadura transversal, o mecanismo de resistência se baseia majoritariamente na resistência à tração do concreto, no engrenamento dos agregados e no efeito pino, ressalta-se ainda que a possibilidade de transferência de força através da fissura depende dos deslocamentos relativos da viga nas proximidades da fissura a da rugosidade de sua superfície.

A Figura 22 ilustra a configuração estática padrão analisada pelos autores, as referências experimentais foram tomadas de trabalhos anteriores, cabendo estudo aqui apresentado apenas a análise do mecanismo de resistência ao cisalhamento das vigas.

Figura 22. Sistema de ensaio das vigas avaliadas por MUTTONI e SCHWARTZ (1991).



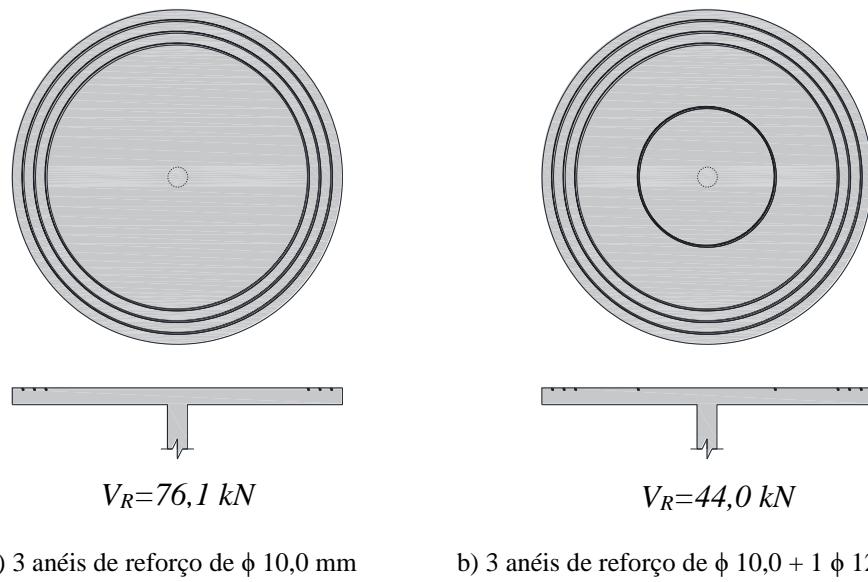
Fonte: Adaptado de MUTTONI e SCHWARTZ (1991).

Concernente às lajes, os autores constataram que os mecanismos de ruína são análogos aos de uma viga, evidenciando que as mesmas soluções construtivas, a princípio, podem ser implementadas. Umas das similaridades observadas é a de que na região da fissura uma parte

da força cortante é resistida pelo engrenamento na região fissurada e pelo efeito pino das barras longitudinais.

Os autores analisaram dois ensaios realizados por BOLLINGER (1985), com base nesse trabalho eles observaram que a força resistente de punção é inversamente proporcional à abertura da fissura, e essa por sua vez é proporcional à rotação da laje. Nos supracitados ensaios foram observadas duas lajes idênticas, com exceção de um anel adicional próximo à região do pilar em uma das lajes, a Imagem 23 evidencia os elementos analisados.

Figura 23. Lajes ensaiadas por BOLLINGER (1985).



a) 3 anéis de reforço de  $\phi 10,0\text{ mm}$       b) 3 anéis de reforço de  $\phi 10,0 + 1 \phi 12,5\text{ mm}$

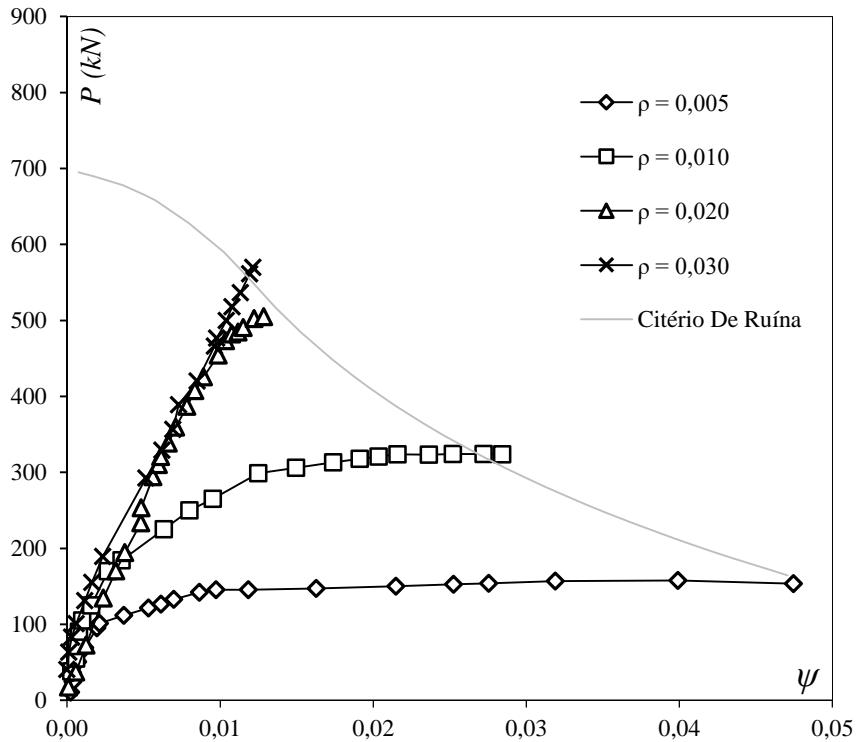
Fonte: Adaptado de MUTTONI e SCHWARTZ (1991).

Ao observar os resultados obtidos, constatou-se que o anel de reforço adicional na região crítica causou uma redução substancial na resistência à punção, já que em geral a fissura crítica é responsável pela redução da carga resistente, e a força resistente de punção é inversamente proporcional à abertura da fissura, o anel na região crítica estimulou a fissuração nessa localidade o que explica a redução significativa de resistência da laje.

Adicionalmente os autores fizeram uso de um banco de dados com inúmeros ensaios de punção da literatura, e analisaram analiticamente como diferentes parâmetros influenciam na resistência da laje, entre as inúmeras grandezas apresenta-se o estudo concernente à taxa de armadura longitudinal  $\rho$ , Figura 24, onde são apresentadas relações *Carga-Rotação* ( $P-\psi$ ) para lajes com diferentes montantes de armadura, a curva referente ao critério de ruína pode ser

determinada empiricamente para descrever as restrições de ductilidade, e consequentemente a força de punção pode ser determinada analiticamente.

Figura 24. Relação *carga-rotação* ( $P-\psi$ ) de lajes com diferentes taxas de armadura.



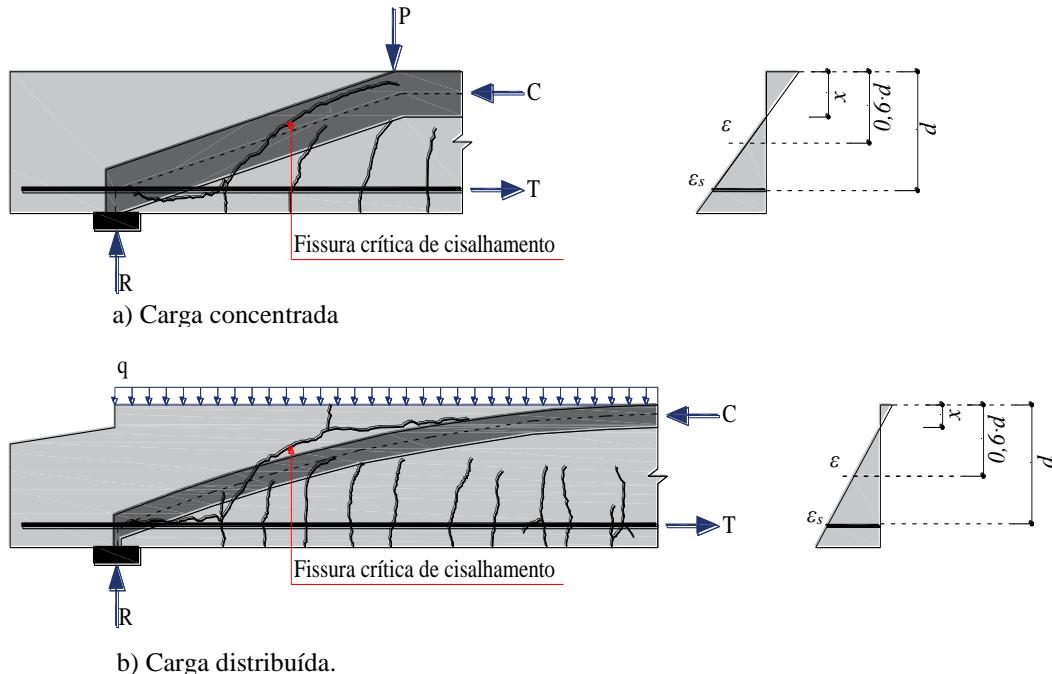
Fonte: Adaptado de MUTTONI e SCHWARTZ (1991).

#### 2.4.3 MUTTONI (2003)

Nessa pesquisa o autor desenvolveu o conceito de Critério de Ruína com base na fissura crítica de cisalhamento para vigas e lajes sem reforço transversal, o desenvolvimento do critério foi viabilizado por meio da análise de bancos de dados. No que se refere às vigas, MUTTONI (2003) comenta que a abertura  $w$  da fissura crítica que governa o comportamento ao cisalhamento de um elemento sem reforço transversal é proporcional ao produto entre a deformação  $\varepsilon$  da fibra tracionada na profundidade  $0,6 \cdot d$  e a altura útil  $d$ , conforme indicado na Figura 25, que a exibe a análise da relação entre a abertura da fissura crítica de cisalhamento e o produto  $\varepsilon \cdot d$  para vigas com cargas concentradas e vigas com cargas distribuídas. Com relação às grandezas que influenciam no critério de ruína, a deformação  $\varepsilon$  pode ser calculada por meio da Equação 4, onde  $M$  denota o momento fletor causado pela carga que solicita a viga,  $b$  e  $d$  expressam respectivamente a largura e a altura útil do elemento,  $\rho$  indica a taxa de armadura longitudinal tracionada e  $E_s$  o módulo de elasticidade do aço que compõe o reforço, por fim  $x$

exprime a profundidade da linha neutra e que pode ser calculada pela Equação 5, onde  $E_c$  indica o modulo de elasticidade do concreto que compõe a seção.

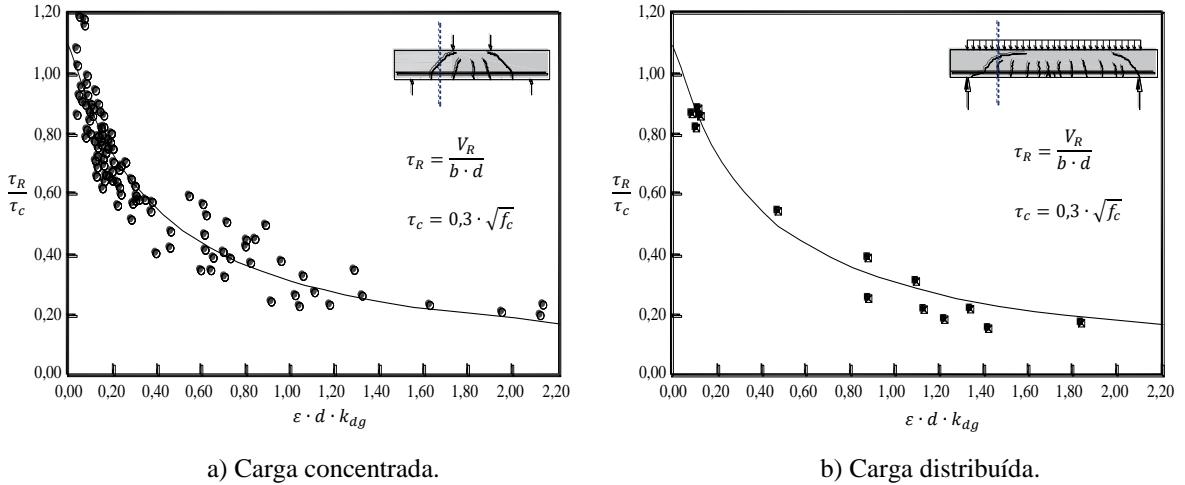
Figura 25. Fissura crítica de cisalhamento em vigas estudada por MUTTONI (2003).



Fonte: Adaptado de MUTTONI (2003).

Já com respeito a análise do banco de dados, Figura 26, o autor observou que a tendência decrescente da resistência ao cisalhamento em relação à deformação tem um formato símple a uma hipérbole, destarte o autor estabeleceu a Equação 6 que expressa o critério de ruína por cisalhamento, onde  $\tau_R$  indica a tensão cisalhamente referente à carga responsável pelo colapso da viga,  $V_R$ , enquanto  $k_{dg}$  indica um fator de escala que pondera o diâmetro máximo do agrado, podendo ser calculado pela Equação 7 — onde  $d_g$  expressa o diâmetro máximo do agradado graúdo — e  $\tau_c$  denota a resistência ao cisalhamento do concreto e é obtida pela Equação 8 em função da resistência à compressão do material que compõe a viga. Para avaliar a acurácia da proposta o autor estabeleceu alguns parâmetros estátiscos conforme indicado na Tabela 8 onde é possível observar a assertividade da proposta por meio da comparação da carga resistente teórica obtida por meio do critério de ruína com o respectivo registro experimental.

Figura 26. Critério de Ruína por Cisalhamento para vigas sem reforço transversal.



Fonte: adaptado de MUTTONI (2003).

$$\varepsilon = \frac{M}{b \cdot d \cdot \rho \cdot E_s \cdot (d - x/3)} \cdot \left( \frac{0,6 \cdot d - x}{d - x} \right) \quad \text{Eq. 4}$$

$$x = d \cdot \rho \cdot \frac{E_s}{E_c} \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{2 \cdot E_s}{\rho \cdot E_c}} - 1 \right) \quad \text{Eq. 5}$$

$$\tau_R = \frac{V_R}{b \cdot d} = \frac{\tau_c}{0,9 + 2,3 \cdot \varepsilon \cdot d \cdot k_{dg}} \quad \text{Eq. 6}$$

$$k_{dg} = \frac{48}{d_g + 16} \quad \text{Eq. 7}$$

$$\tau_c = 0,3 \cdot \sqrt{f_c} \quad \text{Eq. 8}$$

Tabela 8. Resumo estatístico do resultado da análise do Critério de Ruína para vigas.

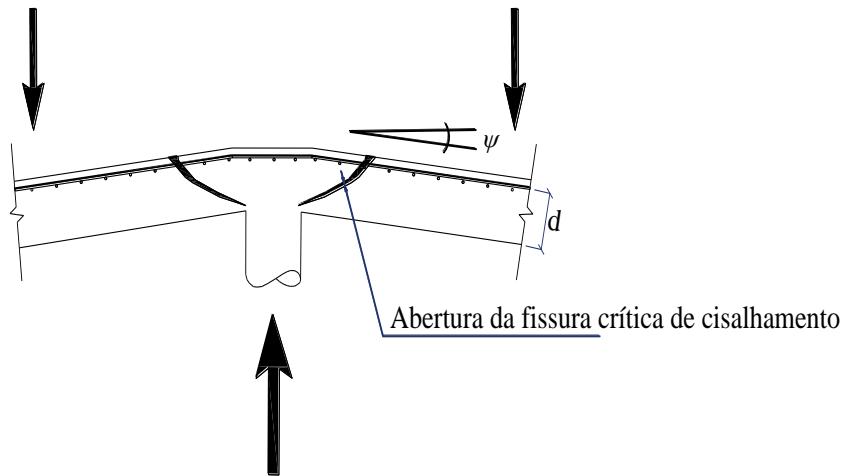
Tipo de ensaio	Nº de vigas	Média ( $V_{u,experimental} / V_{u,critério}$ )	Coeficiente de Variação
Carga concentrada	253	1,02	15%
Carga distribuída	16	0,93	14%
Geral	269	1,01	15%

Fonte: Adaptado de MUTTONI (2003).

Comentando agora sobre as lajes, MUTTONI (2003) realizou uma análise análoga à efetuada para as vigas, nesse cenário a abertura  $w$  da fissura crítica de cisalhamento é proporcional ao produto entre a rotação  $\psi$  do elemento e sua altura útil  $d$  conforme esquematizado na Figura 27,

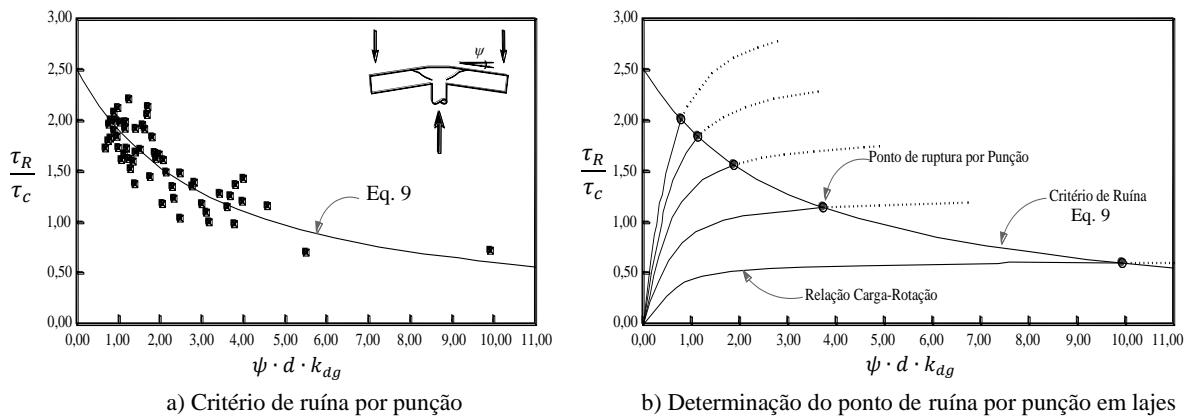
esse critério de ruína permite a análise do comportamento da laje por meio da relação *tensão-rotacão*,  $\tau\psi$ , o banco de dados estudado pelo autor foi composto por 60 ensaios de punção, nesse cenário a Figura 28a ilustra a análise do banco de dados, de onde foi possível desenvolver a Equação 9 que descreve o critério de ruína por punção para lajes onde  $u$  denota o perímetro crítico de cisalhamento, já os demais parâmetros são análogos aos comentados na abordagem para vigas, adicionalmente o item b da imagem 28 ilustra o funcionamento do critério de ruína, é possível observar que a metodologia indica o ponto de interrupção da relação  $\tau\psi$  correspondente à ruptura por punção. Para avaliar a acurácia da proposta, MUTTONI (2003) empregou uma análise estatística que coteja a carga resistente teórica auferida por meio do critério de ruína com carga registrada experimentalmente, a Tabela 9 exibe o resumo estatístico, onde é possível constatar a assertividade do modelo.

Figura 27. Fissura crítica de cisalhamento em lajes sem reforço transversal.



Fonte: Adaptado de MUTTONI (2003).

Figura 28. Critério de Ruína por Punção para lajes sem reforço transversal.



Fonte: Adaptado de MUTTONI (2003).

$$\tau_R = \frac{V_R}{u \cdot d} = \frac{\tau_c}{0,4 + 0,125 \cdot \psi \cdot d \cdot k_{dg}} \quad \text{Eq. 9}$$

Tabela 9. Resumo estatístico do resultado da análise do Critério de Ruína para Lajes.

Tipo de ensaio	Nº de Lajes	Média ( $V_{u,experimental} / V_{u,critério}$ )	Coeficiente de Variação
Punção: Carregamento simétrico	60	1,00	13%

Fonte: Adaptado de MUTTONI (2003).

#### 2.4.4 MUTTONI (2008)

No estudo conduzido pelo autor, o fenômeno da punção em lajes sem armadura transversal foi analisado de um ponto de vista mecânico, com isso foi apresentado um critério de ruína para punção que descreve a carga resistente com base na rotação da laje, Equação 10, onde  $u$  é o perímetro da seção crítica submetida à punção,  $d$  a altura útil,  $f_c$  a resistência à compressão do concreto,  $\psi$  a rotação da laje e  $d_g$  e  $d_0$  são propriedades geométricas do agregado, onde  $d_g$  é o diâmetro máximo do agregado e  $d_0$  é um diâmetro de referência no valor de 16 mm, comentase que a acurácia do critério de ruína foi atestada por meio de um banco de dados composto por 99 ensaios de punção coletados da literatura.

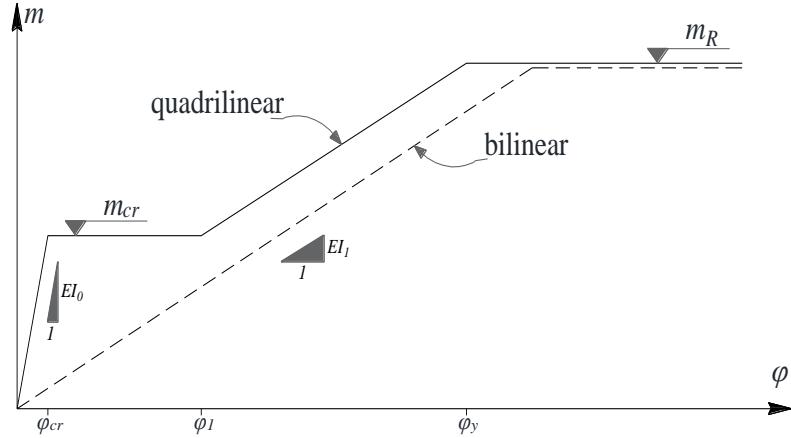
$$\frac{V_R}{u \cdot d \cdot \sqrt{f_c}} = \frac{\frac{3}{4}}{1 + 15 \frac{\psi \cdot d}{d_0 + d_g}} \quad \text{Eq. 10}$$

O autor viabilizou, também, a obtenção da resposta à flexão de uma laje em termos de *carga- rotação* por meio de simulação numérica não linear, tal resposta numérica tem como base a lei constitutiva do elemento em termos de *momento-curvatura* ( $m-\varphi$ ), como mostrado na Figura 29, o autor discutiu dois tipos de solução, uma mais refinada baseada em um diagrama quadrilínear, onde  $m_{cr}$  e  $m_R$  correspondem aos momentos de fissuração e ao momento resistente respectivamente, e outra simplificada que pode ser adotada desprezando a resistência à tração do concreto  $f_{ct}$  e o efeito de enrijecimento à tração, o que resulta em uma relação bilinear.

Associando essa resposta numérica com o critério de ruína é possível analisar o quanto a resistência à punção do elemento compromete a capacidade à flexão do elemento estrutural, para demonstrar a capacidade do método o autor tomou como referência experimental as lajes ensaiadas por KINNUNEN e NYLANDER (1960) que são detalhadas na Figura 30, como resultado é apresentada a Figura 31 onde o autor coteja sua solução com os registros experimentais, nesse cenário é possível constatar que a resistência da laje é dada pela interseção

entre as duas curvas. Nota-se que a solução proposta representa de forma adequada os resultados experimentais.

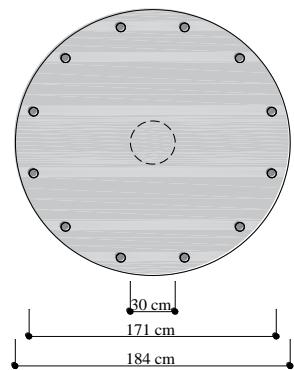
Figura 29. Relações  $m$ - $\varphi$  quadrilinar e bilinear propostas por MUTTONI (2008).



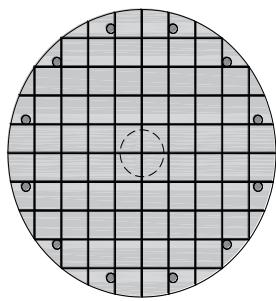
Fonte: adaptado de MUTTONI (2008).

Sequencialmente, foi estabelecida uma proposta simplificada para a curva de flexão em termos de *carga-rotação*, dada pela Equação 11, com o intuito de alvitrar um modelo de dimensionamento simplificado em associação com o critério de ruína de projeto, Equação 12, como ilustrado na Figura 31. A exata resistência à punção é então obtida estabelecendo  $V_{Rd}$  igual a  $V_d$ , que indicam a resistência e a solicitação de cálculo respectivamente, e resolvendo interativamente a equação resultante. Como a proposta acaba exigindo um cálculo interativo até para casos simples, essa formulação pode não ser muito proveitosa na prática. Alternativamente, uma verificação de dimensionamento pode ser realizada calculando a rotação da laje  $\psi_d$  correspondente à força cortante majorada usada na Equação 11. Desse valor, a correspondente resistência à punção da laje é obtida pelo método numérico. Se a resistência obtida da Equação 12 é maior do que o carregamento de cálculo  $V_d$ , o dimensionamento está seguro e conservador, caso contrário, se for insuficiente, a armadura de flexão, a dimensão do pilar, ou a espessura da laje devem ser incrementadas.

Figura 30. Lajes ensaiadas por KINNUNEN e NYLANDER (1960).

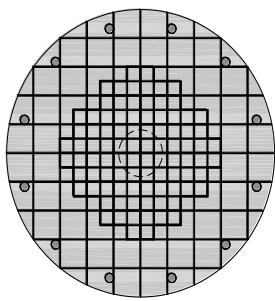


a) Dimensões das lajes



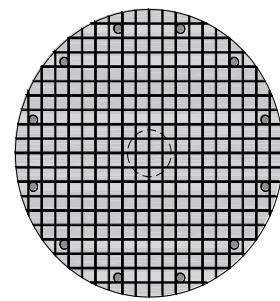
b) IA30d-32

$f_c = 26,8 \text{ Mpa}$   
 $f_{sy} = 451 \text{ Mpa}$   
 $d = 123 \text{ mm}$   
 $\rho = 0,5 \%$   
 $d_g = 32 \text{ mm}$



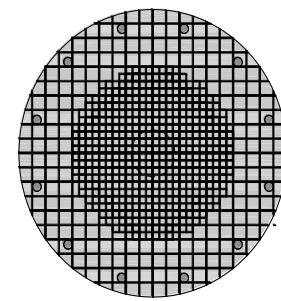
c) IA30e-34

$f_c = 27,9 \text{ Mpa}$   
 $f_{sy} = 461 \text{ Mpa}$   
 $d = 120 \text{ mm}$   
 $\rho_{min} = 0,5 \%$   
 $\rho_{max} = 1,0 \%$   
 $d_g = 32 \text{ mm}$



d) IA30a-25

$f_c = 25,6 \text{ Mpa}$   
 $f_{sy} = 451 \text{ Mpa}$   
 $d = 124 \text{ mm}$   
 $\rho = 1,0 \%$   
 $d_g = 32 \text{ mm}$

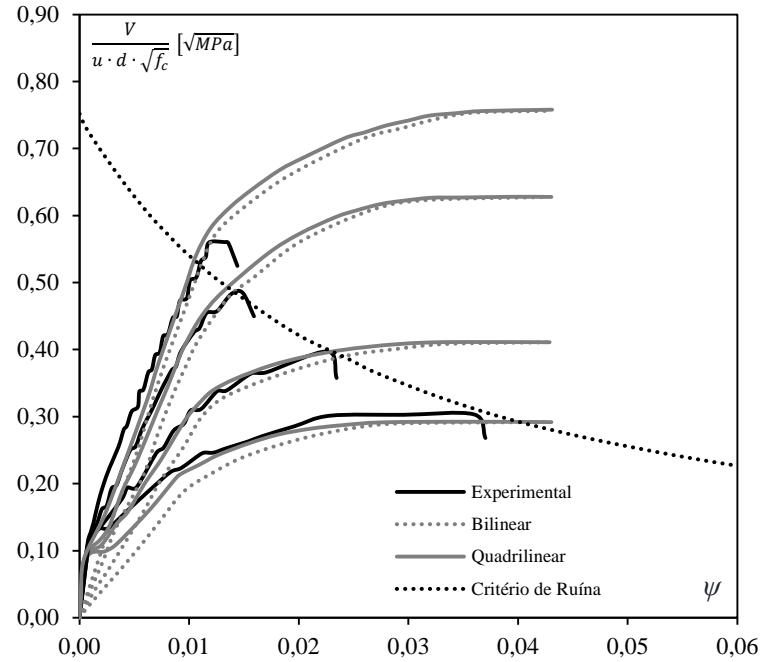


e) IA30c-30

$f_c = 30,6 \text{ Mpa}$   
 $f_{sy} = 435 \text{ Mpa}$   
 $d = 120 \text{ mm}$   
 $\rho_{min} = 1,0 \%$   
 $\rho_{max} = 2,1 \%$   
 $d_g = 32 \text{ mm}$

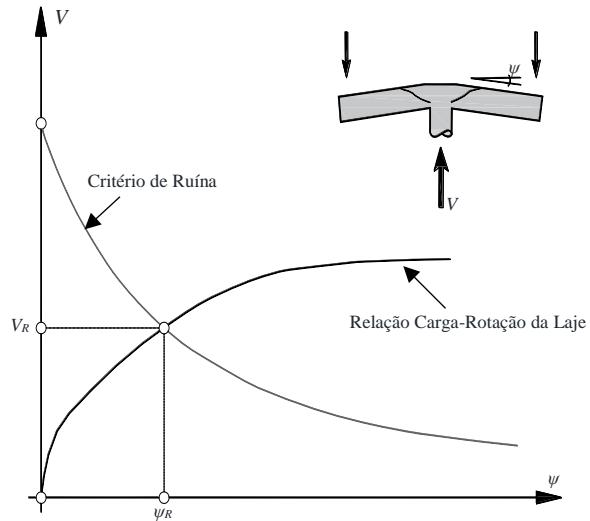
Fonte: Adaptado de MUTTONI (2008).

Figura 31. Resultados do modelo proposto por MUTTONI (2008) versus Resultados Experimentais.



Fonte: Adaptado de MUTTONI (2008).

Figura 32. Processo de dimensionamento e verificação proposto por MUTTONI (2008).



Fonte: Adaptado de MUTTONI (2008).

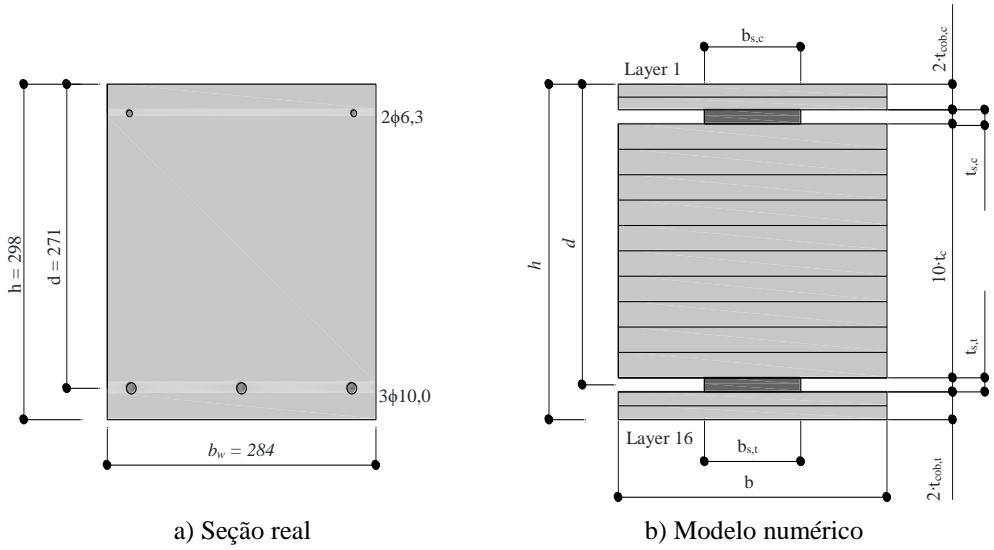
$$\psi = 0,33 \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{f_{sy}}{E_s} \left( \frac{V_d}{8 \cdot m_R} \right)^{3/2} \quad \text{Eq. 11}$$

$$\frac{V_{Rd}}{u \cdot d \cdot \sqrt{f_c}} = \frac{2}{3 \cdot \gamma_c} \cdot \frac{1}{1 + 20 \frac{\psi \cdot d}{d_0 + d_g}} \quad \text{Onde} \quad \gamma_c = 1,5 \quad \text{Eq. 12}$$

### 3 INVESTIGAÇÃO DO COMPORTAMENTO À FLEXÃO

Para investigar o comportamento à flexão de uma viga, serão empreendidas análises com auxílio do DOCROS, *Design Of CROss Sections*, software desenvolvido por pesquisadores da Universidade do Minho, em Portugal, a ferramenta utiliza o método dos elementos finitos para analisar seções flexionadas. Para tanto, é necessário fornecer ao programa as propriedades geométricas e as leis constitutivas — em função da relação *tensão-deformação* — dos materiais que compõem a seção analisada. Na modelagem o elemento é discretizado em várias Camadas/Layers, e cada camada recebe uma lei constitutiva referente a um material componente da seção, em seguida o DOCROS simula a mobilização do elemento estrutural através de processos interativos durante a fase de equilíbrio da seção, e por fim fornece resultados em termos de *momento-curvatura*,  $m-\varphi$ .

Figura 33. Modelagem da viga S3-2-3 de KAKLAUKAS *et al.* (2014).



Fonte: Autor.

Para exemplificar o funcionamento do programa foram tomadas como referência experimental quatro vigas do trabalho de KAKLAUKAS *et al.* (2014), duas de referência, sem fibras, e duas em CRFA, a saber, os espécimes S3-2-3, S2-3, S3-1-F05 e S3-1-F10. Na presente modelagem as seções foram discretizadas em 16 camadas, onde as camadas 3 e 14 representam as armaduras longitudinais e possuem área equivalente às barras que compõem o reforço, as demais camadas representam o concreto que compõe a peça, para ilustrar o processo é apresentada a Figura 33 que coteja a seção real da viga S-2-3 com o seu modelo numérico equivalente — as outras vigas

foram modeladas de forma análoga —, adicionalmente a Tabela 10 detalha as dimensões das camadas dos modelos que representam as vigas estudadas.

Tabela 10. Dimensões dos Layers do modelo numérico (1).

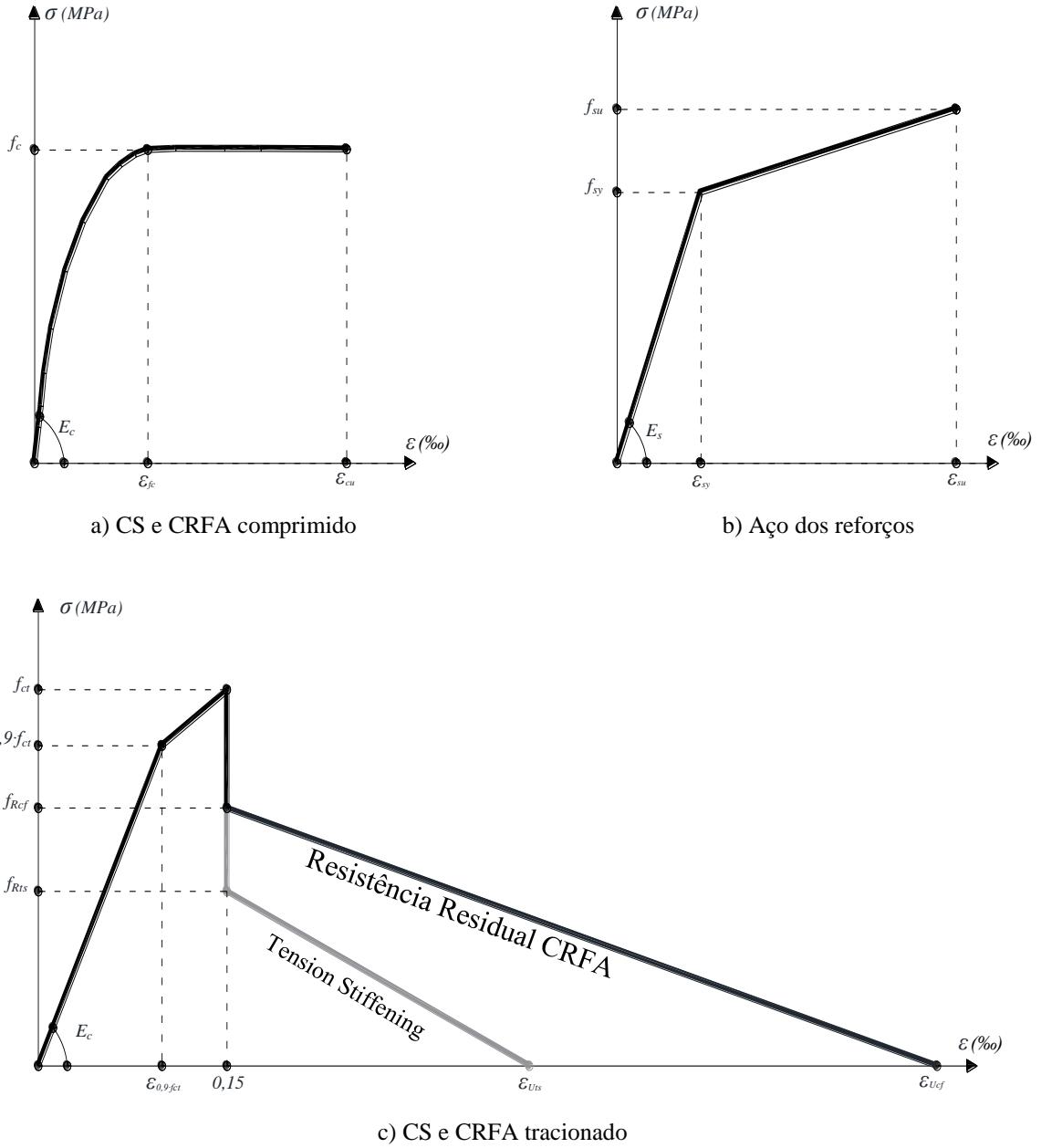
Vigas	Layers (mm)							
	<i>b</i>	<i>t<sub>cob,c</sub></i>	<i>b<sub>s,c</sub></i>	<i>t<sub>s,c</sub></i>	<i>t<sub>c</sub></i>	<i>b<sub>s,t</sub></i>	<i>t<sub>s,t</sub></i>	<i>t<sub>cob,t</sub></i>
S3-2-3	284,0000	14,4250	9,0500	6,3000	23,0850	23,2000	10,0000	11,0000
S2-3	272,0000	12,9520	9,0500	6,3000	24,4796	46,6000	10,0000	6,5000
S3-1-F05	278,0000	12,9520	9,0500	6,3000	24,0796	23,5000	10,0000	9,5000
S3-1-F10	279,0000	09,9250	9,0500	6,3000	24,4850	23,5000	10,0000	9,5000

Fonte: Autor.

Com relação às leis constitutivas que são expressas em termos de tensão-deformação,  $\sigma-\varepsilon$ , Figura 34, foram adotadas como referência as concepções do FIB MODEL CODE 10 (2012) por ser um documento de renome no meio científico no que se refere ao CRFA. Sobre o concreto comprimido, Figura 34a,  $E_c$  representa o módulo de elasticidade tangente e que é estimado pela Equação 13, onde  $\alpha_E$  é um fator que denota a contribuição do agregado graúdo que compõe o concreto,  $\varepsilon_{fc}$  equivale à deformação correspondente à  $f_c$  e  $\varepsilon_{cu}$  à deformação de ruptura, que podem ser definidas pelas Equações 14 e 15 respectivamente, comenta-se que tanto o CRFA quanto o CS receberão a mesma lei de comportamento quanto à compressão, essas equações podem ser usadas quando as grandezas do concreto comprimido não dispõem de registros experimentais.

Concernente ao comportamento do aço dos reforços, Figura 34b,  $E_s$  indica o módulo de elasticidade do material,  $f_{sy}$  e  $f_{su}$  indicam, respectivamente, as tensões de escoamento e ruptura, ao passo que  $\varepsilon_{sy}$  e  $\varepsilon_{su}$  são as suas correspondentes deformações, comenta-se que essas grandezas obedecem aos registros experimentais, mas na ausência dos mesmos é possível consultar em fontes externas valores médios referentes ao tipo de aço que compõe o reforço, pois é algo amplamente documentado na literatura.

Figura 34. Leis constitutivas.



Fonte: Autor.

$$E_c = 21500 \cdot \alpha_E \cdot (0,10 \cdot f_c)^{1/3} \quad \text{Eq. 13}$$

$$\varepsilon_{fc} = \begin{cases} 2,0 & \text{para } f_c \leq 58 \text{ MPa} \\ 2,0 + 0,085 \cdot (f_c - 8)^{0,53} & \text{para } f_c > 58 \text{ MPa} \end{cases} \quad \text{Eq. 14}$$

$$\varepsilon_{cu} = \begin{cases} 3,5 & \text{para } f_c \leq 58 \text{ MPa} \\ 2,6 + 35 \cdot [(f_c - 8)/100]^4 & \text{para } f_c > 58 \text{ MPa} \end{cases} \quad \text{Eq. 15}$$

$$f_{ct} = \begin{cases} 0,30 \cdot (f_c - 8)^{2/3} & \text{para } f_c \leq 58 \text{ MPa} \\ 2,12 \cdot \ln(1 + 0,10 \cdot f_c) & \text{para } f_c > 58 \text{ MPa} \end{cases} \quad \text{Eq. 16}$$

$$f_{Rts} = \alpha_1 \cdot f_{ct} \quad \text{Onde } \alpha_1 = 0,45 \quad \text{Eq. 17}$$

$$\varepsilon_{Uts} = \alpha_2 \cdot \varepsilon_{ct} \quad \text{Onde } \varepsilon_{ct} = 0,15 \quad \text{Eq. 18}$$

$$\alpha_2 = 20,3 - 15,1 \cdot \kappa + \frac{1,31}{\eta \cdot \rho} - 1,06 \cdot \frac{\kappa}{\eta \cdot \rho} \quad \text{Onde } \kappa = \frac{d}{h} \quad \text{e } \eta = \frac{E_s}{E_c} \quad \text{Eq. 19}$$

$$f_{Rcf} = 0,45 \cdot f_{R1} \quad \text{Ou } f_{Rcf} = 0,54 \cdot \sqrt{f_c \cdot C_f \cdot \frac{l_f}{d_f}} \quad \text{Eq. 20}$$

$$\varepsilon_{Ucf} = \min\left(0,02; \frac{2,5}{l_{cs}}\right) \quad \text{Eq. 21}$$

$$l_{cs} = \min(s_{rm}; h_{sp} - x) \quad \text{Eq. 22}$$

No que se refere à figura 34c, a mesma contempla o comportamento à tração do concreto simples e do concreto com fibras. Da origem até o ponto da tensão de pico  $f_{ct}$  — que pode ser estimada pela Equação 16 —, os dois materiais apresentam o mesmo comportamento e seguem as prerrogativas do FIB MODEL CODE 10 (2012), com relação aos tramos residuais, é nessa região que eles se distinguem, o concreto simples tem seu comportamento determinado pelo efeito *tension estiffening* provido pela interação da matriz de concreto com as barras do reforço longitudinal tracionado, enquanto que o CRFA tem sua resistência residual determinada pelas propriedades da fibra de aço e do compósito cimentício.

Com relação ao concreto simples, a lei constitutiva residual foi baseada do modelo de TORRES *et al.* (2004), onde  $f_{Rts}$  indica a resistência residual pós fissuração, em MPa, provida pelo efeito *tension estiffening* e é determinada pela Equação 17, e  $\varepsilon_{Uts}$  expõe a deformação residual limite do concreto simples e é estimada conforme a Equação 18, ainda comentando sobre essa expressão, o coeficiente  $\alpha_2$  que determina a extensão do tramo residual é calculado conforme a Equação 19, onde  $\rho$  representa a taxa de armadura longitudinal tracionada,  $k$  a razão entre altura total e a altura útil, e  $\eta$  o quociente entre os módulos de elasticidade do concreto e do aço que compõem a seção. Ademais, comenta-se que o modelo adotado para representar o efeito *tension estiffening* será elucidado com mais detalhes na seção ulterior.

Relativo ao CRFA foi feito um ajuste empírico em relação ao FIB MODEL CODE 10 (2012), onde o tramo residual estipulado pelo código foi substituído por um trecho linear simplificado, onde  $f_{Rcf}$  indica a tensão pós-fissuração do concreto reforçado com fibras e é calculado com base na Equação 20 — sendo essa a equação preconizada pelo FIB MODEL CODE 10 (2012) para a tensão residual remetente ao estado limite de serviço (ELS) —, onde  $f_{RI}$  representa uma das tensões residuais obtidas no ensaio de caracterização do comportamento à tração do CRFA, na ausência desse registro experimental,  $f_{Rcf}$  pode ser estimada com base no fator de forma, consumo de fibras e resistência à compressão da matriz de concreto, conforme também indicado na Equação 20, essa equação alternativa é obtida por meio da inserção de uma expressão que estima um valor para  $f_{RI}$  e que será elucidada com mais profundidade em uma seção posterior.

Ainda sobre o CRFA,  $\varepsilon_{Ucf}$  indica a deformação residual limite e pode ser estimada pela Equação 21, onde  $l_{cs}$  exprime o comprimento característico estrutural (*structural characteristic length*) do prisma utilizado no ensaio característico de flexão em três pontos descrito no RILEM TC 162-TDF (2002), e que pode ser definido pela Equação 22, onde  $s_{rm}$  exprime o espaçamento médio entre fissuras,  $h_{sp}$  a altura do prisma na seção do entalhe e  $x$  a profundidade da linha neutra, Nesse estudo, adotou-se  $l_{cs} = h_{sp} = 125$  mm, pois, em geral, nesse tipo de ensaio há a formação de um único plano de fissuração no momento da ruína do prisma, o que inviabiliza a análise de  $s_{rm}$ , e a extensão correspondente à linha neutra é praticamente desprezível em fases avançadas de carregamento, como se trata de um ensaio padronizado é possível considerar  $l_{cs} = h_{sp} = 125$  mm como um resultado que representa o comportamento geral do ensaio de caracterização, nesse contexto o resultado de  $l_{cs}$  sempre será o mesmo, portanto é possível estabelecer um valor padronizado e constante para o valor de  $\varepsilon_{Ucf}$ , a saber, 20 %.

Retornando à modelagem das vigas de KAKLAUSKAS *et al.* (2014), com relação as leis constitutivas das vigas, as tabelas 11 e 12 apresentam o resumo das propriedades dos materiais que compõem as vigas, a saber, o concreto e o aço dos reforços, nessa ordem. Prosseguindo, agora compulsando a Figura 35, que permite a análise da qualidade das respostas numéricas ao compará-las com os registros experimentais em termos de *momento-curvatura*,  $m-\varphi$ , nesse cenário é possível constatar a acurácia da metodologia proposta por meio da propinquidade entre os registros numéricos e experimentais.

Tabela 11. Lei constitutiva do concreto (1).

Vigas	Compressão				Tração				
	$f_c$ (MPa)	$E_c$ (GPa)	$\varepsilon_{fc}$ (%)	$\varepsilon_{cu}$ (%)	$f_{ct}$ (MPa)	$f_{Rts}$ (MPa)	$f_{Rcf}$ (MPa)	$\varepsilon_{Uts}$ (%)	$\varepsilon_{Ucf}$ (%)
S3-2-3	50,90	36,98	2,00	3,50	3,68	1,65	-	4,11	-
S2-3	48,10	36,29	2,00	3,50	3,51	1,58	-	2,30	-
S3-1-F05	55,60	38,09	2,00	3,50	3,94	-	2,09	-	20,00
S3-1-F10	48,00	36,27	2,00	3,50	3,51	-	2,83	-	20,00

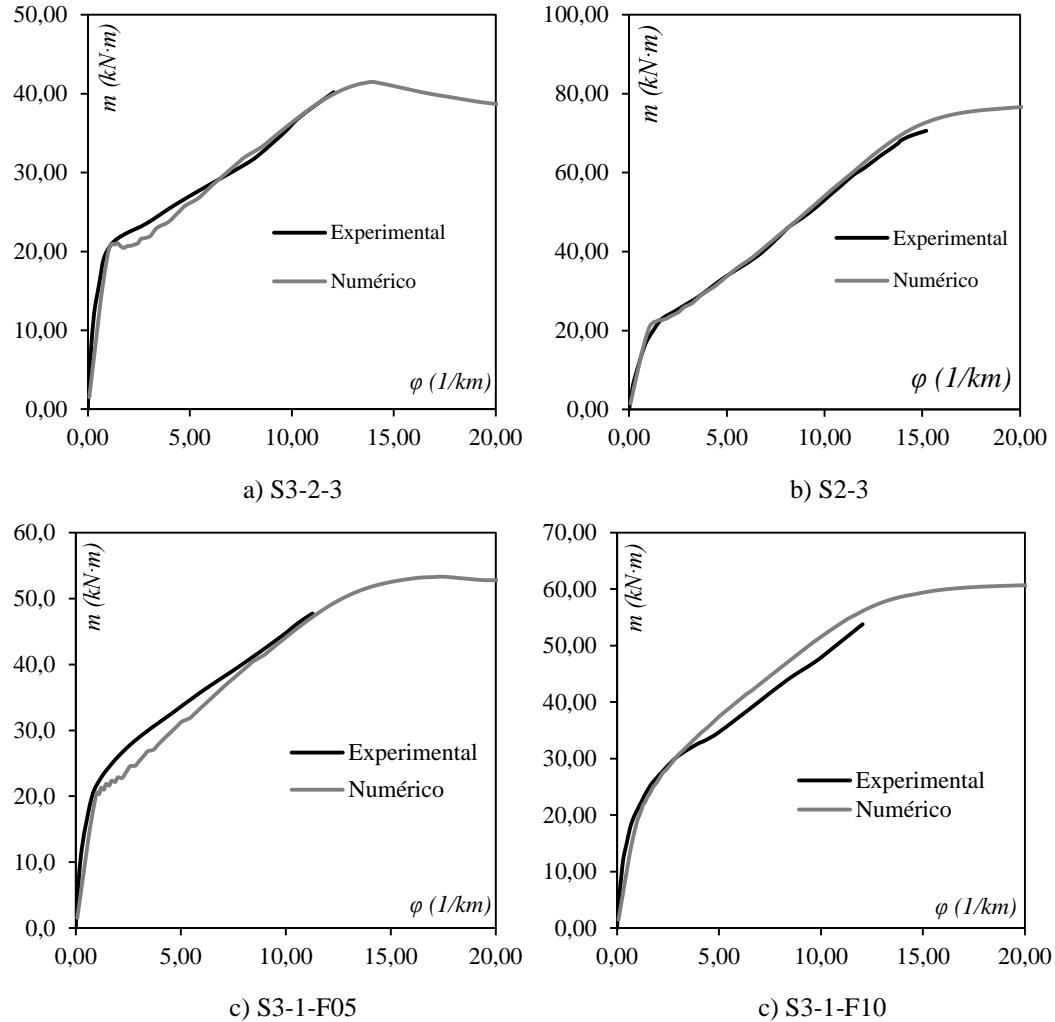
Fonte: Autor.

Tabela 12. Lei constitutiva do aço do reforço longitudinal (1).

$\phi$ (mm)	$f_{sy}$ (MPa)	$\varepsilon_{sy}$ (%)	$f_{su}$ (MPa)	$\varepsilon_{su}$ (%)	$E_s$ (GPa)
6,3	560,00	2,76	650,00	15,00	203,00
10,0	560,00	2,76	650,00	15,00	203,00
14,0	560,00	2,76	650,00	15,00	203,00

Fonte: Autor.

Figura 35. Confronto entre as relações  $m$ - $\varphi$  experimentais e numéricas.



Fonte: Autor.

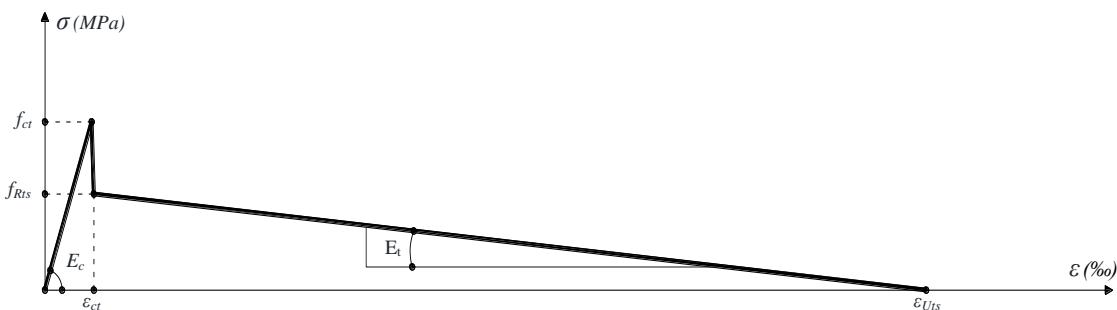
### 3.1 O EFEITO TENSION-STIFFENING

Segundo TORRES *et al.* (2004) a contribuição do concreto íntegro tracionado entre fissuras na rigidez de vigas de concreto armado fletidas, efeito conhecido como *tension-stiffening*, não pode ser desconsiderada. Para ponderar esse efeito vários modelos foram propostos, onde é possível citar os trabalhos de FLOEGL e MANG (1982), GUPTA e MAESTRINI (1990), WU *et al.* (1991) e CHAN *et al.* (1992), apesar de precisos eles geralmente levam a algoritmos complexos e de difícil implementação, principalmente quando se tratam de estruturas compostas por um grande número de elementos.

Como alternativa, existem modelos simplificados e práticos, e que são amplamente usados, que se baseiam na adaptação da lei constitutiva que representa o concreto tracionado em termos de *tensão-deformação*, os primeiros registros dessa abordagem se encontram nos trabalhos de SCANLON (1971), LIN e SCORDELIS (1975), GILBERT e WARNER (1978) e COPE *et al.* (1979).

TORRES *et al.* (1998) e TORRES (2001) também apresentam uma abordagem que trabalha com a lei constitutiva do concreto tracionado, permitindo mensurar a rigidez residual do concreto após a fissuração, tal abordagem foi refinada em TORRES *et al.* (2004), onde o autor apresenta a lei constitutiva registrada na Figura 36, onde  $E_t$  indica a rigidez referente à tensão  $f_{Rts}$  e à deformação  $\varepsilon_{Uts}$  residuais e são calculadas de acordo com as Equações 17 e 18.

Figura 36. Lei constitutiva do concreto tracionado proposta por TORRES *et al.* (2004).

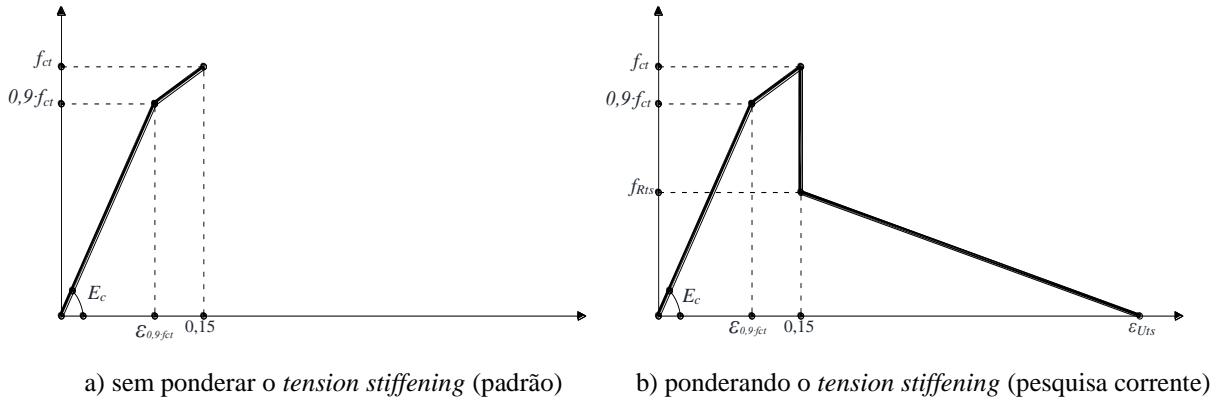


Fonte: Adaptado de TORRES *et al.* (2004).

Com relação ao modelo constitutivo empregado nas modelagens da corrente pesquisa, Figura 34c, comenta-se que o mesmo é resultado de um amalgama envolvendo a proposta constitutiva padrão do FIB MODEL CODE (2012), Figura 37a, e a proposta de TORRES *et al.* (2004), Figura 36, resultando no padrão estabelecido na Figura 37b, onde é possível compulsar que o trecho inicial que parte da origem até a tensão de pico é progresso do FIB MODEL CODE

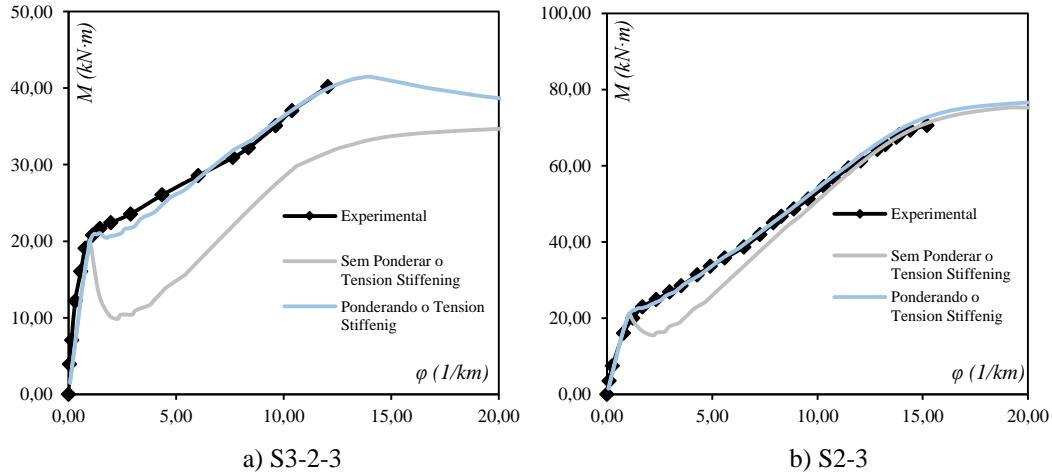
(2012), ao passo que o tramo residual pós-pico adicionado é oriundo do modelo estipulado por TORRES *et al.* (2004).

Figura 37. Lei constitutiva do concreto simples tracionado.



Fonte: Autor.

Figura 38. Análise da importância do *tension-stiffening* com base nas relações  $m$ - $\varphi$ .



Fonte: Autor.

Para avaliar o impacto da contabilização do *tension-estiffening* na reprodução numérica do comportamento de vigas fletidas, novamente recorreu-se ao trabalho de KAKLAUSKAS *et al.* (2014) como referência experimental, as vigas S3-2-3 e S2-3 — as mesmas avaliadas na Figura 35 — foram modeladas usando as leis constitutivas nas figuras 37a e 37b, ou seja, modelagens comparativas desprezando e ponderando a resposta residual pós-fissuração do concreto. Nesse cenário é apresentada a Figura 38, que ilustra os comportamentos resultantes, onde é possível constatar que negligenciar o *tension-estiffening* conduz a resultados distantes da resposta experimental após a fissuração da viga, importa comentar que a viga S3-2-3 apresentou um maior impacto em sua análise, ao passo que no elemento S2-3 a discrepância foi mitigada, isso

se deve ao fato do *tension-estiffening* ser peremptório em peças com baixas taxas de armadura, com o aumento da quantidade de reforço o aço tende a amentar sua influência no controle da comportamento pós-fissuração, delegando ao concreto um papel marginal, esse ponto é fisicamente representado na expressão do coeficiente  $\alpha_2$  que define a extensão do tramo residual do concreto, Equação 19, a qual apresenta o taxa de armadura  $\rho$ , como sendo inversamente proporcional ao referido coeficiente, de fato essa boa leitura do fenômeno físico é um dos principais fatores que colabora para os bons resultados obtidos com base na proposta de TORRES *et al.* (2004).

Um questionamento que poderia surgir, é com relação ao *tension-estiffening* no CRFA visto que as vigas compostas por esse material também possuem armadura longitudinal, no entanto, em situações onde o *tension-estiffening* tem um papel preponderante, a saber, em peças com baixa taxa de armadura, caso a viga possua fibras de aço a resposta após a fissuração será comandada pelas fibras, nesse cenário o *tension-estiffening* tem influência mínima, algo que foi apoiado pelos resultados das modelagens computacionais expressas na Figura 35 onde as vigas em CRFA apresentaram boas respostas sem ponderar o *tension-estiffening*, com base nessas premissas foi estabelecido o padrão de lei constitutiva apresentado na Figura 34c.

### 3.2 ESTIMATIVAS DAS RESISTÊNCIAS RESIDUAIS

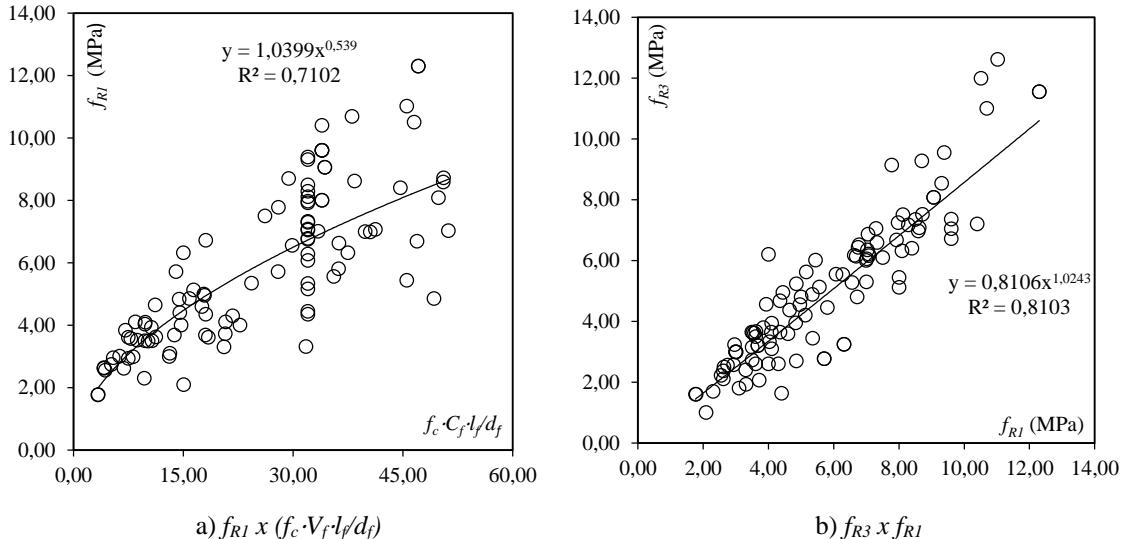
Para determinar a lei constitutiva do CRFA durante o processo de modelagem se faz necessária a posse dos registros experimentais das resistências residuais do material obtidos pelo ensaio de flexão em três pontos de prismas entralhados realizado conforme o RILEM TC 162-TDF (2002). No entanto, na maioria dos artigos envolvendo vigas em CRFA, não é encontrada a caracterização à tração desse material, nesse cenário surge a necessidade do desenvolvimento de uma metodologia empírica que permita estimar o valor dessas resistências residuais de acordo com os parâmetros intrínsecos do concreto com fibras. Isto posto, o presente estudo tem como objetivo propor formulações que correlacionem os valores das resistências residuais  $f_{Ri}$  com os parâmetros  $f_c$ ,  $C_f$ , e  $l_f/d_f$ , que são as principais grandezas que influenciam no comportamento à tração do CRFA, a partir da análise de um banco de dados com resultados do ensaio descrito no RILEM TC 162-TDF (2002).

Tabela 13. Resumo do Banco de Dados (Caracterização à tração do CRFA).

Autor	Nº de Prismas	$f_c$ (Mpa)	$C_f$ (%)	$l_f/d_f$
AMIN <i>et al.</i> (2013)	2	56,20 - 63,70	0,50	63,64 - 65,00
BARROS (1995)	7	35,70 - 54,00	0,40 - 0,80	60,00 - 75,00
BARROS <i>et al.</i> (2003)	2	58,80 - 64,00	0,33 - 0,47	65,22
BARROS <i>et al.</i> (2005)	5	31,76	0,13 - 0,47	65,22 - 80,00
BARROS <i>et al.</i> (2015)	4	55,68 - 70,02	0,40 - 1,00	67,27
CONFORTI <i>et al.</i> (2013)	2	29,52 - 30,40	0,33 - 0,47	62,50
CUNHA <i>et al.</i> (2003)	6	25,04 - 34,56	0,13 - 0,47	67,00 - 80,00
FERRER BOIX (2003)	8	56,51 - 60,18	0,50 - 1,00	60,00
GIACCIO <i>et al.</i> (2008)	3	53,60 - 59,70	0,27 - 0,53	60,00 - 80,00
LIMA (2012)	3	62,80 - 63,30	0,26 - 0,79	80,00
LOURENÇO (2012)	9	27,40 - 61,60	0,28 - 0,98	65,00
MONTAIGNAC <i>et al.</i> (2011)	3	46,90 - 63,20	1,00 - 1,25	63,64 - 80,00
MORAES NETO (2013)	6	51,90 - 70,02	0,80 - 1,20	67,27
MOREILLON (2013)	2	97,50 - 102,00	0,27	78,95
PAJAK e PONIKIEWSKI (2013)	6	80,10 - 98,20	0,50 - 1,50	37,50
POH <i>et al.</i> (2008)	3	34,72 - 45,92	0,40 - 0,53	80,00
PUJADAS <i>et al.</i> (2012)	4	25,00	0,27 - 0,53	63,64 - 80,00
ZHAO <i>et al.</i> (2016)	29	45,00-72,00	1,07	66,67

Fonte: Autor.

Figura 39. Relações entre os parâmetros  $f_{RI}$ ,  $f_{R3}$  e  $(f_c \cdot V_f \cdot l_f/d_f)$ .



Fonte: Autor.

O banco de dados utilizado na análise é formado por 164 ensaios de flexão em prismas entalhados (Anexo A). Todas as peças selecionadas foram confeccionadas com fibras *hooked end* e apresentam resistência à compressão  $f_c$ , volume de fibras  $C_f$ , e fator de forma  $l_f/d_f$  variando, respectivamente entre 25,0-102,0 Mpa, 0,13-1,50 % e 37,50-95,24, a Tabela 13 apresenta o resumo do banco de dados, importa comentar que os ensaios selecionados apresentam comportamento *softening* (amolecimento). A análise consistiu em estabelecer equações de tendência que representassem as relações  $(f_c \cdot V_f \cdot l_f/d_f) \times f_{RI}$  e  $f_{R3} \times f_{RI}$ , conforme

indicado na Figura 39, e com base na análise gráfica foram estabelecidas as Equação 23 e 24. Por fim, para avaliar a qualidade do modelo, foi empregado o fator  $\lambda$ , Equação 25, que coteja o valor experimental da resistência residual  $f_{Ri}$  com o seu equivalente teórico, por conseguinte a Tabela 14 apresenta o resumo estatístico da análise de  $\lambda$  em todo o banco de dados, onde  $M$ ,  $DP$  e  $CV$  denotam, nesta ordem, a média aritmética, o desvio padrão e o coeficiente de variação, adicionalmente são apresentados como referência de comparação os modelos de MORAES NETO *et al.* (2014) e MOUSSA (2017) que também foram desenvolvidos com uma metodologia semelhante — mas com as suas devidas particularidades —, isto é, com base na análise de um banco de dados e na observação do parâmetro  $\lambda$ . Como resultado dessa comparação é possível constatar que a presente proposta, em termos de precisão, se localiza de forma intermediária entre os modelos de MORAES NETO *et al.* (2014) e de MOUSSA (2017), esse último se destaca como o de melhores resultados. De fato, essa comparação com outras propostas é importante para que a análise do modelo da pesquisa corrente não fique amparada em subjetivismo.

$$f_{R1} = 1,20 \cdot \sqrt{f_c \cdot C_f \cdot \frac{l_f}{d_f}} \quad \text{Eq. 23}$$

$$f_{R3} = 0,85 \cdot f_{R1} \quad \text{Eq. 24}$$

$$\lambda = \frac{f_{Ri,experimental}}{f_{Ri,teórico}} \quad \text{Eq. 25}$$

Tabela 14. Resumo estatístico das Equações propostas.

Pesquisa	$f_{R1}$			$f_{R3}$			Resumo Geral		
	$M$	$DP$	$CV$	$M$	$DP$	$CV$	$M$	$DP$	$CV$
Moraes Neto <i>et al.</i> (2014)	0,98	0,27	27,88%	0,99	0,36	36,08%	0,99	0,32	31,98%
Moussa (2017)	1,02	0,18	17,78%	1,09	0,26	23,68%	1,06	0,22	22,23%
Corrente Pesquisa	1,00	0,23	23,25%	1,03	0,32	31,55%	1,02	0,28	27,40%

Fonte: Autor.

### 3.3 RESPOSTA CARGA-DESLOCAMENTO NUMÉRICA

Como comentado inicialmente na presente pesquisa, almeja-se trabalhar com a relação *carga-deslocamento*,  $P-\delta$ , que é uma propriedade do elemento de viga, no entanto o DOCROS fornece o registro numérico em termos de *momento-curvatura*,  $m-\varphi$ , que é uma propriedade da seção transversal. Para contornar essa limitação foi empregada uma metodologia externa ao software

para escrever a relação  $P-\delta$  numérica de uma viga a partir do registro  $m-\varphi$  fornecido pelo DOCROS.

Nesse cenário serão discutidas duas soluções, uma mais refinada baseada na metodologia de NEWMARK (1943), e outra mais simplificada baseada na equação da linha elástica. Para ilustrar o funcionamento das propostas será usado como referência experimental a viga A1% do trabalho de AOUDE *et al.* (2012) — a viga A0% também foi modelada, mas para análises posteriores, nesse momento apenas a peça A1% será exemplificada para expor a metodologia completa —, as informações básicas da viga selecionada já foram comentadas na seção 2.2.1 da corrente pesquisa.

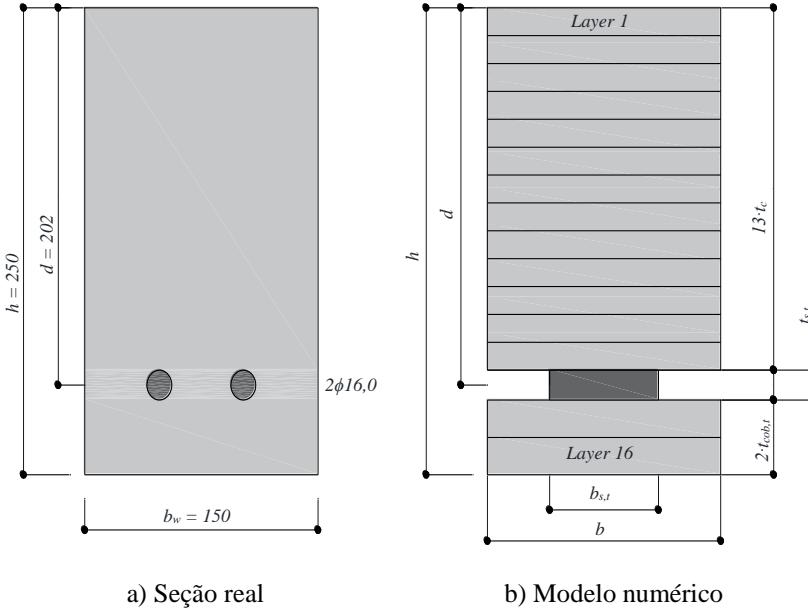
Já que ambas as soluções dependem da relação  $m-\varphi$  fornecido pelo DOCROS, inicia-se a discussão apresentando a modelagem da viga estudada, primeiramente com respeito à parte geométrica, a Figura 40 apresenta o modelo de camadas que representa o elemento de referência, enquanto a tabela 15 apresenta as dimensões das respectivas camadas. Prosseguindo, agora comentando sobre os materiais que compõem a seção, foram empregadas as mesmas leis constitutivas apresentadas na pesquisa corrente, como resultado as Tabelas 16 e 17 exibem o resumo das leis constitutivas do concreto e do aço.

Com relação ao método mais refinado, baseado em NEWMARK (1943), comenta-se que o mesmo se baseia na discretização do elemento estrutural ao longo do vão, no presente caso a viga foi analisada em 15 seções diferentes, conforme ilustrado na Figura 41 que coteja a viga real com o modelo numérico, em seguida é preciso construir o diagrama de curvatura de acordo com a configuração estática da viga, Figura 41a, para cada Carga  $V$  é possível conhecer o momento fletor  $m$  em cada ponto de análise da viga, com base no diagrama  $m-\varphi$  fornecido pelo DOCROS é possível determinar a curvatura em cada seção e traçar o diagrama apresentado na Figura 42a.

De posse do diagrama de curvatura, é possível obter o diagrama de rotação por meio da integração, Figura 42b, e ao aplicar uma segunda integral é possível obter o diagrama de deslocamento, Figura 42c, no entanto, é possível usar uma abordagem simplificada e substituir a integral por um somatório direto, ao compulsar os diagramas nota-se que os mesmos podem ser divididos em figuras menores, aproximadamente triângulos, trapézios e retângulos, desse modo é viabilizado o cálculo da área do diagrama para uma determinada seção de análise, o que é equivalente à integral. Para ilustrar o exposto, são apresentadas as Equações 26 e 27, que

indicam respectivamente a rotação máxima e o deslocamento máximo conforme indicado nos correspondentes diagramas, realizando esse procedimento para cada carga  $V$  é possível traçar o diagrama  $V-\delta$ .

Figura 40. Modelagem das vigas A1% e A0% de AOUDE *et al.* (2012).



Fonte: Autor.

Tabela 15. Dimensões dos Layers do modelo numérico (2).

Vigas	Layers (mm)				
	$b$	$t_{cob,t}$	$b_{s,t}$	$t_{s,t}$	$t_c$
A0%	150,0000	20,0000	25,0000	16,0000	14,9231
A1%	150,0000	20,0000	25,0000	16,0000	14,9231

Fonte: Autor.

Tabela 16. Lei constitutiva do concreto (2).

Vigas	Compressão				Tração				
	$f_c$ (MPa)	$E_c$ (GPa)	$\varepsilon_{fc}$ (%)	$\varepsilon_{cu}$ (%)	$f_{ct}$ (MPa)	$f_{rct}$ (MPa)	$f_{rcf}$ (MPa)	$\varepsilon_{Uts}$ (%)	$\varepsilon_{Ucf}$ (%)
A0%	23,20	28,50	2,00	3,50	1,85	0,83	-	1,93	-
A1%	19,60	26,91	2,00	3,50	1,54	-	1,53	-	20,00

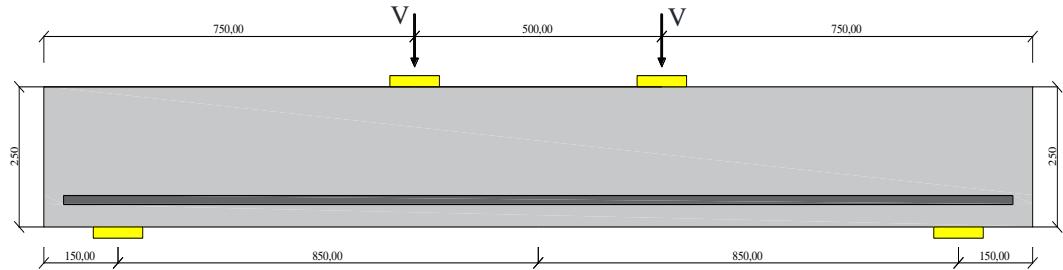
Fonte: Autor.

Tabela 17. Lei constitutiva do aço do reforço longitudinal (2).

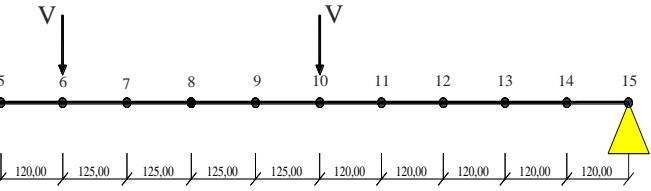
$\phi$ (mm)	$f_{sy}$ (MPa)	$\varepsilon_{sy}$ (%)	$f_{su}$ (MPa)	$\varepsilon_{su}$ (%)	$E_s$ (GPa)
16,0	478,00	2,76	578,00	15,00	205,00

Fonte: Autor.

Figura 41. Modelagem numérica da viga A1% de AOUDE *et al.* (2012).



a) Viga real.



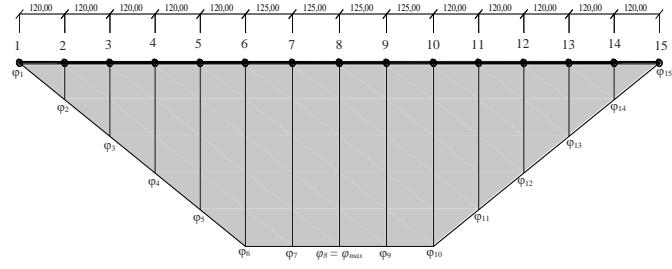
b) Modelo numérico discretizado.

Fonte: Autor.

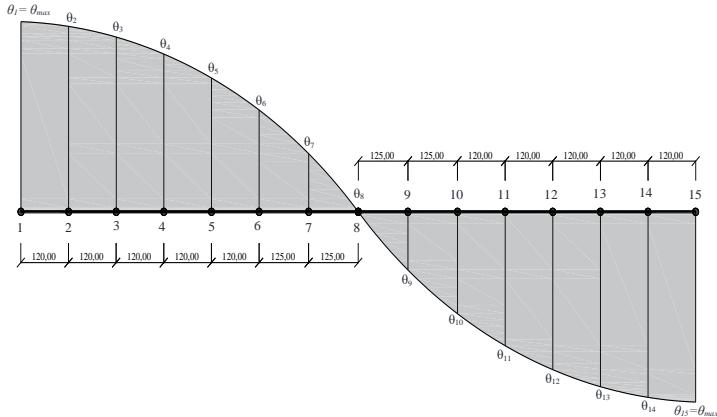
Com relação à segunda abordagem, partindo da relação  $m\varphi$  numérica, é possível determinar a rigidez  $E \cdot I$  de uma determinada seção transversal, na qual atua o máximo momento fletor que solicita a viga, por meio da tangente em cada ponto do gráfico conforme indicado na figura 43a, em seguida é feita a generalização de que para uma determinada carga  $V$  que solicita o elemento todas as seções possuem a mesma rigidez, com isso é possível aplicar a equação clássica da deflexão elástica de acordo com a configuração estática da viga, que nesse caso é expressa pela Equação 28, portanto para cada  $V$  é possível conhecer uma rigidez  $E \cdot I$  e determinar um respectivo deslocamento  $\delta$ .

Prosseguindo, apresenta-se a Figura 43b, que ilustra a rigidez da viga ao longo do vão para uma carga  $V = 15,27$  kN para a qual as seções da viga já estão fissuradas, usando a abordagem simplificada a rigidez permanece constante em  $2.350,00$   $\text{kN} \cdot \text{m}^2$ , já sob a ótica do modelo mais refinado é possível verificar a variação da rigidez ao longo do vão  $L$  da viga e com um valor médio de  $2.970,00$   $\text{kN} \cdot \text{m}^2$ , apresentando uma diferença de  $26,38\%$  em relação à abordagem simplificada, ou seja após a fissuração o método baseado na deflexão elástica subestima a rigidez da global do elemento viga.

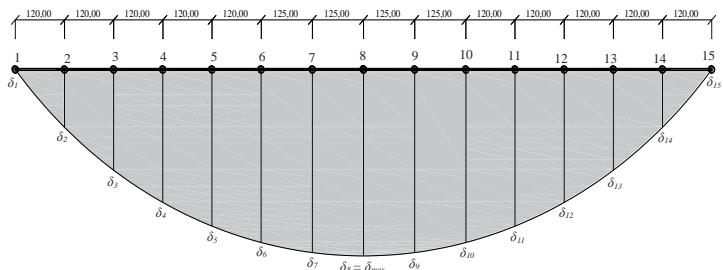
Figura 42. Integração do diagrama de curvatura.



a) Diagrama de curvatura  $\varphi$ .



b) Diagrama de rotação  $\theta$  (1ª integração).



c) Diagrama de deslocamento  $\delta$  (2ª integração).

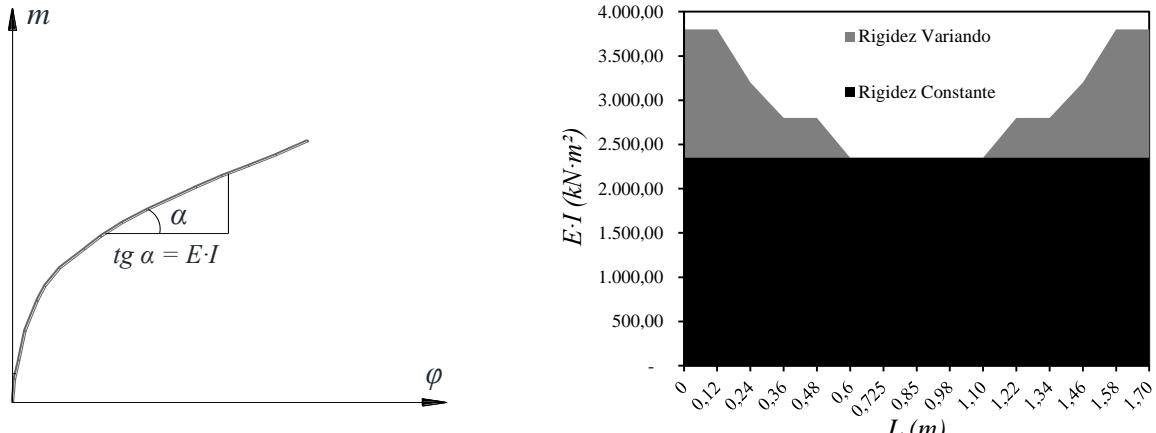
Fonte: Autor.

$$\theta_{max} = 120 \cdot (\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5) + 185 \cdot \varphi_6 + 125 \cdot \varphi_7 \quad \text{Eq. 26}$$

$$\delta_{max} = 60 \cdot \theta_1 + 120 \cdot \theta_2 + 120 \cdot \theta_3 + 120 \cdot \theta_4 + 120 \cdot \theta_5 + 60 \cdot \theta_6 + 62,5 \cdot \theta_7 + 125 \cdot \theta_8 \quad \text{Eq. 27}$$

$$\delta_{max} = \frac{V \cdot a}{24 \cdot E \cdot I} \cdot (3 \cdot L^2 - 4 \cdot a^2) \quad \text{Eq. 28}$$

Figura 43. Avaliação da Rigidez.

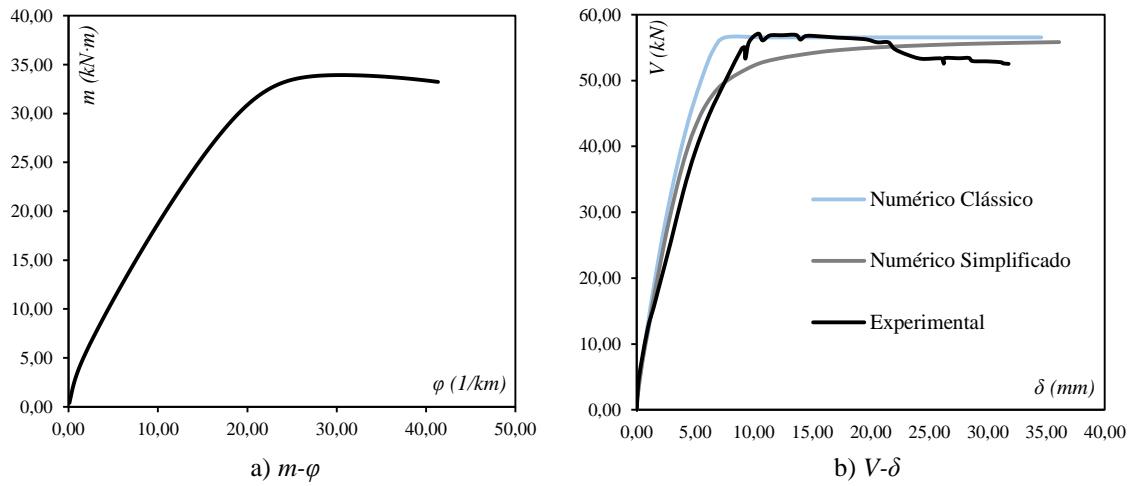


a) Análise da Rigidez de uma seção transversal

b) Rigidez ao longo do vão do elemento

Fonte: Autor.

Figura 44. Resultados da modelagem da viga A1%.



Fonte: Autor.

Com relação aos resultados, apresenta-se a Figura 44a que exprime a relação  $m-\varphi$  resultante da modelagem com o DOCROS, ao passo que a imagem 44b coteja a resposta  $V-\delta$  experimental com as obtidas por meio das abordagens numéricas, onde é possível notar que após a fissuração existe um certo descompasso das respostas numéricas com a experimental, isso se deve ao fato da lei constitutiva do concreto com fibras tracionado trabalhar com valores médios, que na ausência de registros de caracterização, não capturam as particularidades de preparo do material desse experimento em específico, o que não desluz a acurácia das respostas numéricas, já que a tendência de comportamento é reproduzida de modo satisfatório. Com relação às duas respostas numéricas também é perceptível uma divergência entre as mesmas, a curva oriunda do método inspirado em NEWMARK (1943) apresenta um comportamento mais rígido em

relação à resposta obtida com a equação da linha elástica, esse fenômeno se deve ao fato desse último método subestimar a rigidez fissurada global da viga, o que não inviabiliza sua aplicação, pois mesmo com essa generalização os resultados obtidos são próximos ao da abordagem mais refinada. Visto que essa técnica mais elaborada apresenta uma implementação demasiadamente trabalhosa, em um cenário de modelagem com um grande número de elementos estruturais o método simplificado baseado na deflexão elástica se mostra mais viável, portanto, comenta-se que a metodologia simplificada será adotada como padrão nas modelagens subsequentes.

#### 4 CRITÉRIO DE RUÍNA POR CISALHAMENTO

O critério de ruína da pesquisa corrente tem como objetivo descrever a resistência ao cisalhamento,  $V$ , em função do deslocamento,  $\delta$ , e foi desenvolvido com base na análise de um banco de dados composto de 79 ensaios *stuttgart* de vigas de concreto armado, sendo 10 vigas sem reforço transversal, 22 vigas reforçadas apenas com fibras de aço, 15 armadas apenas com estribos e 32 com reforço híbrido de fibras e estribos, a Tabela 18 indica o resumo do banco de dados — O banco de dados é apresentado em mais detalhes no Anexo B —, um questionamento que pode surgir é: se a diversificação de arranjos de reforços observada no banco de dados enseja mais incertezas na análise; no entanto, comenta-se que esse ponto será elucidado posteriormente. Prosseguindo, a Figura 45a correlaciona o inverso da carga  $V_u$ , correspondente ao colapso da viga, com o seu respectivo deslocamento  $\delta_u$ , resultando em uma distribuição de pontos com tendência similar à uma hipérbole descendente — pois do ponto de vista físico é o que o critério de ruína representa, o decaimento da resistência ao cisalhamento com o aumento da deformação —, adicionalmente, comenta-se que foi aplicado um fator  $k_{d0}$  para mitigar o efeito escala na visualização dos dados e que é dado pela Equação 29, onde  $d$  indica a altura útil da viga e 122 indica a altura útil em milímetros da menor viga contida no banco de dados. Com relação à Figura 45b, elucida-se que a mesma ilustra o funcionamento do Critério de Ruína, no caso 1 a curva intercepta o a relação *carga-deslocamento* da viga indicando o ponto de ruptura por cisalhamento onde o registro é interrompido, já no segundo caso a curva do critério não intercepta o tramo da viga indicando a ruína por flexão.

Isto posto, o critério de ruína desenvolvido é apresentado na Equação 30, onde  $V_R$  indica a resistência ao cisalhamento da viga, que no presente trabalho será calculada de acordo com o modelo proposto no FIB MODEL CODE 10 (2012) expresso por meio das Equações 31 a 35,  $M_R$  denota o momento fletor resistente da peça e  $M_V$  expõe o momento fletor causado por  $V_R$

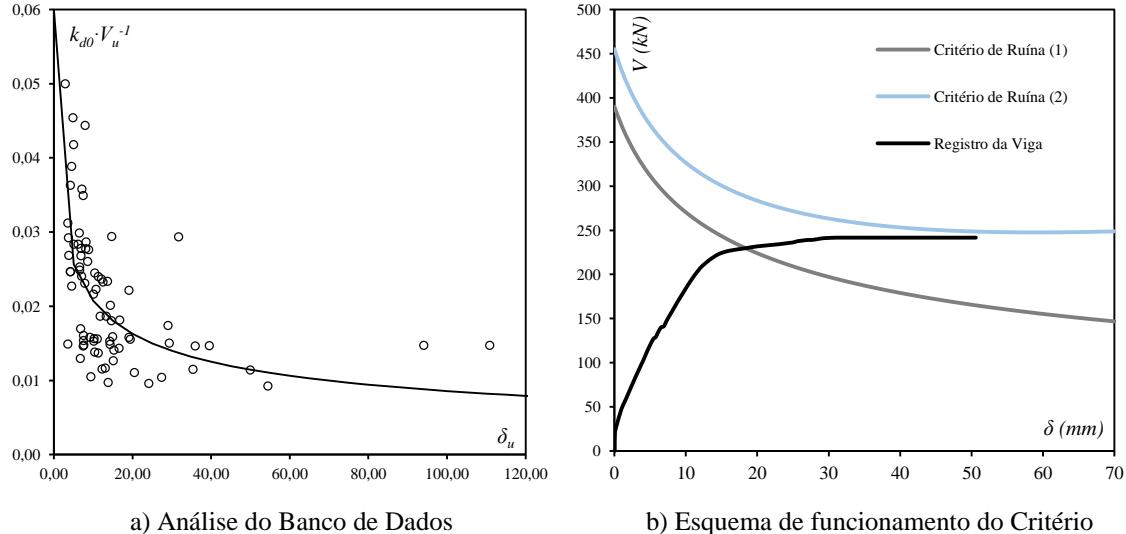
e que pode ser obtido pelo equilíbrio da viga, como se tratam de ensaios no modelo *stuttgart* é possível estabelecer a relação exibida na Equação 36, e posteriormente é possível reescrever o critério de ruína conforme enfatizado na Equação 37. Adicionalmente, ainda sobre a Equação 30, elucida-se que os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  levam em consideração a proporção da viga em relação ao seu vão de corte e também a esbeltez da peça, pois durante as análises foi constatado que ponderar as relações  $a/d$  e  $h/b$  é imperativo para prever o modo de ruína da viga.

Tabela 18. Resumo do Banco de Dados (Critério de Ruína por Cisalhamento).

Autor	Número de vigas	$f_c$ (MPa)	$C_f$ (%)	$l_f/d_f$	$\rho_w$ (%)	$a/d$
AMIN e FOSTER (2016)	10	34,00 - 46,00	0,0 - 0,71	65,00	0,0 - 0,12	2,8
AOUDE et al (2012)	9	19,60 - 23,30	0,0 - 1,00	55,00	0,0 - 0,24	3,0 - 3,1
CUCCIARA et al. (2004)	16	40,85 - 43,23	0,0 - 2,00	60,00	0,0 - 0,63	2,0 - 2,8
DING et al. (2012)	16	32,50 - 41,20	0,0 - 0,80	80,00	0,0 - 0,41	4,0
GALI e SUBRAMANIAM (2019)	9	38,70	0,0 - 0,75	80,00	0,0	1,8
JONGVIVATSAKUL et al. (2013)	2	55,90 - 56,60	1,00	48,39 - 66,67	0,30	2,8
KIM et al (2017)	8	21,00 - 63,00	0,0 - 0,75	60,00	0,0 - 0,12	4,0
YOU et al. (2010)	9	33,80 - 65,40	0,0 - 0,67	65,00	0,0 - 0,53	3,0
<b>Resumo Geral</b>	<b>79</b>	<b>19,60 - 65,40</b>	<b>0,0 - 2,00</b>	<b>48,39 - 80,00</b>	<b>0,0 - 0,63</b>	<b>1,8 - 4,0</b>

Fonte: Autor.

Figura 45. Desenvolvimento do Critério de ruína.



Fonte: Autor.

$$k_{d0} = \frac{d}{122} \quad \text{Eq. 29}$$

$$V = \frac{(V_R)^\alpha}{0,77 + 0,14 \cdot \sqrt{\delta}} + \frac{(M_V)^\beta}{M_R} \cdot \sqrt{\delta} \quad \text{Onde} \quad \alpha = \left(1 + \frac{d}{8 \cdot a}\right) \quad \text{e} \quad \beta = \left(1 + \frac{h}{30 \cdot b}\right) \quad \text{Eq. 30}$$

$$V_R = V_c + V_{sw} \quad \text{Eq. 31}$$

$$V_c = 0,18 \cdot k_d \cdot b \cdot d \cdot \left[ 100 \cdot \rho_l \cdot f_{ck} \cdot \left( 1 + 7,5 \cdot \frac{f_{Ftu(1,5)}}{f_{ct}} \right) \right]^{\frac{1}{3}} \quad \text{Eq. 32}$$

$$k_d = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2 \quad \text{Eq. 33}$$

$$f_{Ftu(1,5)} = 0,30 \cdot f_{R3} + 0,06 \cdot f_{R1} \quad \text{Eq. 34}$$

$$V_{sw} = 0,9 \cdot \rho_w \cdot b \cdot d \cdot f_{yw} (\cot \theta + \cot \alpha) \cdot \sin \alpha \quad \text{Eq. 35}$$

$$M_V = V_R \cdot a \quad \text{Eq. 36}$$

$$V = \frac{(V_R)^\alpha}{0,77 + 0,14 \cdot \sqrt{\delta}} + \frac{(V_R \cdot a)^\beta}{M_R} \cdot \sqrt{\delta} \quad \text{Eq. 37}$$

Comentando agora sobre o cálculo da resistência ao cisalhamento conforme o FIB MODEL CODE 10 (2012), a resistência à tração diagonal  $V_R$  da viga é dada pela Equação 31, onde  $V_c$  e  $V_{sw}$  indicam, respectivamente, a contribuição do concreto e da armadura transversal. A parcela  $V_c$  é determinada pela Equação 32 onde  $k_d$  representa um fator de escala em função da altura útil da peça conforme a Equação 33 indica, já  $f_{Ftu(1,5)}$  indica a tensão de tração do concreto com fibras de aço no ELU que contribui na resistência ao cisalhamento, essa tensão é a correspondente ao limite de abertura de fissura no cisalhamento preconizado pelo referido código, que é de 1,5 mm, e é determinada pela Equação 34. Onde  $f_{R1}$  e  $f_{R3}$  indicam as tensões residuais características do CRFA.

Já  $V_{sw}$  é calculado pela equação 35 onde  $f_{yw}$  indica a tensão de escoamento do aço que compõe o estribo, por fim  $\theta$  e  $\alpha$  indicam, nesta ordem, a inclinação da diagonal comprimida e o ângulo formado pelos estribos em relação ao eixo da viga ( $90^\circ$ ), na presente pesquisa adotou-se  $\theta = 45^\circ$ . Adicionalmente é possível escrever a equação da parcela do CRFA que resiste ao cisalhamento em função das equações que estimam a resistências residuais do concreto com fibras, inicialmente  $f_{Ftu(1,5)}$  é escrito em função das equações de  $f_{R1}$  e  $f_{R3}$  gerando a Equação 38, essa por sua vez é inserida na Equação de  $V_c$  culminando na Equação 39, onde é possível estimar a parcela de contribuição do concreto apenas com base nos parâmetros básicos da viga.

$f_{Ftu(1,5)}$  em função das Equações de estimativa das resistências residuais do CRFA:

$$\begin{aligned}
 f_{Ftu(1,5)} &= 0,30 \cdot f_{R3} + 0,06 \cdot f_{R1} \\
 f_{Ftu(1,5)} &= 0,30 \cdot 0,85 \cdot f_{R1} + 0,06 \cdot f_{R1} \\
 f_{Ftu(1,5)} &= 0,255 \cdot f_{R1} + 0,06 \cdot f_{R1} \\
 f_{Ftu(1,5)} &= 0,315 \cdot f_{R1} \\
 f_{Ftu(1,5)} &= 0,315 \cdot 1,20 \cdot \sqrt{f_c \cdot C_f \cdot l_f / d_f} \\
 f_{Ftu(1,5)} &= 0,378 \cdot \sqrt{f_c \cdot C_f \cdot l_f / d_f}
 \end{aligned}$$

Eq. 38

Equação de  $V_c$  em função da Equação 38:

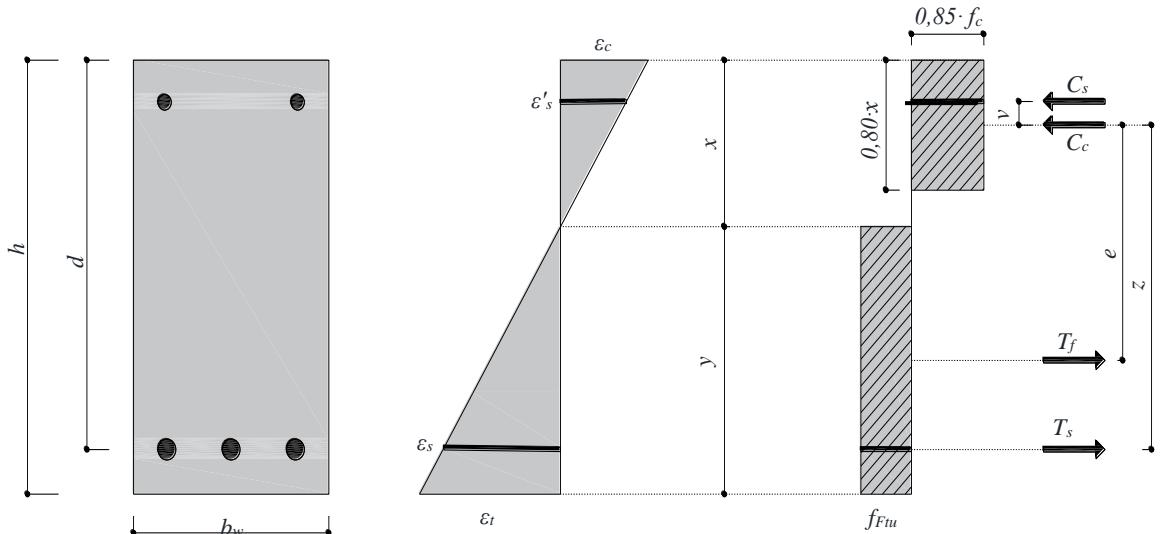
$$\begin{aligned}
 V_c &= 0,18 \cdot k \cdot b \cdot d \cdot \left[ 100 \cdot \rho_l \cdot f_{ck} \cdot \left( 1 + 7,5 \cdot \frac{f_{Ftu(1,5)}}{f_{ct}} \right) \right]^{\frac{1}{3}} \\
 V_c &= 0,18 \cdot k \cdot b \cdot d \cdot \left[ 100 \cdot \rho_{l,t} \cdot f_{ck} \cdot \left( 1 + 7,5 \cdot \frac{0,378 \cdot \sqrt{f_c \cdot C_f \cdot l_f / d_f}}{f_{ct}} \right) \right]^{\frac{1}{3}} \\
 V_c &= 0,18 \cdot k \cdot b \cdot d \cdot \left[ 100 \cdot \rho_{l,t} \cdot f_c \cdot \left( 1 + 2,835 \cdot \frac{\sqrt{f_c \cdot C_f \cdot l_f / d_f}}{f_{ct}} \right) \right]^{\left(\frac{1}{3}\right)}
 \end{aligned}$$

Eq. 39

Ainda comentando sobre a expressão do critério Ruína por cisalhamento, Equação 30, é possível observar que umas das grandezas envolvidas é o momento fletor resistente,  $M_R$ , para determinar o valor desse parâmetro, foi um utilizado um modelo analítico de flexão baseado no FIB MODEL CODE 10 (2012) e que é apresentado na Figura 46, para chegar à uma expressão genérica admitiu-se o escoamento das armaduras e por meio do equilíbrio de forças internas — de forma análoga à metodologia realizada por IMAN *et al.* (1995), mas que teve como referência o ACI 544 (1988) — é possível chegar a uma equação geral para se determinar a profundidade da linha neutra,  $x$ , Equação 40, em casos de vigas sem fibra,  $f_{Ftu(2,5)}$  — que expressa a tensão residual do CRFA no estado limite último (ELU) na flexão, onde o limite de abertura de fissura é 2,5 mm, e que pode ser calculada pela Equação 41 — será igual à zero, no entanto, é muito comum que a armadura comprimida desenvolva uma tensão baixa, o que acaba

por reduzir a fidedignidade da hipótese de escoamento desse reforço, nesse cenário, para não prejudicar a praticidade do modelo, é proposto um coeficiente de redução,  $k_s$ , para ser aplicado na tensão desenvolvida pela armadura comprimida, prosseguindo, julgou-se admissível fixar o valor desse coeficiente como sendo igual a zero, visto que a influência da armadura comprimida geralmente não é significativa, por conseguinte é possível escrever a expressão da linha neutra conforme expresso na Equação 42. De posse da linha neutra é possível calcular os esforços internos e seus respectivos braços de alavanca, culminando no cálculo do momento fletor resistente interno da viga, Equação 43, onde  $z$ ,  $e$  e  $v$  expressam os braços de alavanca das forças resultantes do concreto tracionado e das armaduras longitudinais tracionada e comprimida em relação à resultante do bloco de concreto comprimido, e que respectivamente podem ser definidos pelas Equações 44 e 45 e 46, por fim considerando o coeficiente  $k_s = 0$  é possível reescrever a expressão do momento fletor resistente conforme indicado na Equação 47.

Figura 46. Modelo de flexão do FIB MODEL CODE 10 (2012).



Fonte: Adaptado do FIB MODEL CODE (2010).

Dedução equação da linha Neutra:

$$C_s + C_c = T_f + T_s$$

$$\rho_{lc} \cdot b \cdot d \cdot f_{sy} + 0,85 \cdot f_c \cdot b \cdot 0,80 \cdot x = f_{Ftu(2,5)} \cdot b \cdot (h - x) + \rho_{lt} \cdot b \cdot d \cdot f_{sy}$$

$$\frac{h}{d} = A \therefore h = A \cdot d \quad (A \text{ é uma constante genérica que indica a razão entre } h \text{ e } d)$$

$$\rho_{lc} \cdot b \cdot d \cdot f_{sy} + 0,68 \cdot f_c \cdot b \cdot x = f_{Ftu(2,5)} \cdot b \cdot (A \cdot d - x) + \rho_{lt} \cdot b \cdot d \cdot f_{sy}$$

$$\rho_{lc} \cdot d \cdot f_{sy} + 0,68 \cdot f_c \cdot x = f_{Ftu(2,5)} \cdot (A \cdot d - x) + \rho_{lt} \cdot d \cdot f_{sy}$$

$$\rho_{lc} \cdot d \cdot f_{sy} + 0,68 \cdot f_c \cdot x = f_{Ftu(2,5)} \cdot A \cdot d - f_{Ftu(2,5)} \cdot x + \rho_{lt} \cdot d \cdot f_{sy}$$

$$\begin{aligned}
0,68 \cdot f_c \cdot x + f_{Ftu(2,5)} \cdot x &= f_{Ftu(2,5)} \cdot A \cdot d + \rho_{lt} \cdot d \cdot f_{sy} - \rho_{lc} \cdot d \cdot f_{sy} \\
x \cdot (0,68 \cdot f_c + f_{Ftu(2,5)}) &= d \cdot (f_{Ftu(2,5)} \cdot A + \rho_{lt} \cdot f_{sy} - \rho_{lc} \cdot f_{sy}) \\
\frac{x}{d} &= \frac{f_{Ftu(2,5)} \cdot A + \rho_{lt} \cdot f_{sy} - \rho_{lc} \cdot f_{sy}}{0,68 \cdot f_c + f_{Ftu(2,5)}} \\
\frac{x}{d} &= \frac{\frac{h}{d} \cdot f_{Ftu(2,5)} + f_{sy} \cdot (\rho_{lt} - k_s \cdot \rho_{lc})}{f_{Ftu(2,5)} + 0,68 \cdot f_c}
\end{aligned}$$

Eq. 40

Equação de  $f_{Ftu(2,5)}$  em função dos parâmetros básicos do material:

$$\begin{aligned}
f_{Ftu(2,5)} &= 0,50 \cdot f_{R3} - 0,20 \cdot f_{R1} \\
f_{Ftu(2,5)} &= 0,50 \cdot 0,85 f_{R1} - 0,20 \cdot f_{R1} \\
f_{Ftu(2,5)} &= 0,425 \cdot f_{R1} - 0,20 \cdot f_{R1} \\
f_{Ftu(2,5)} &= 0,225 \cdot f_{R1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{Ftu(2,5)} &= 0,225 \cdot 1,20 \cdot \sqrt{f_c \cdot C_f \cdot \frac{l_f}{d_f}} \\
f_{Ftu(2,5)} &= 0,27 \cdot \sqrt{f_c \cdot C_f \cdot \frac{l_f}{d_f}}
\end{aligned}$$

Eq. 41

Equação da linha neutra em função dos parâmetros básicos da viga ( $k_s = 0$ ):

$$\begin{aligned}
\frac{x}{d} &= \frac{0,27 \cdot \frac{h}{d} \cdot \sqrt{f_c \cdot C_f \cdot \frac{l_f}{d_f}} + f_{sy} \cdot (\rho_{lt} - 0 \cdot \rho_{lc})}{0,27 \cdot \sqrt{f_c \cdot C_f \cdot \frac{l_f}{d_f}} + 0,68 \cdot f_c} \\
\frac{x}{d} &= \frac{0,27 \cdot \frac{h}{d} \cdot \sqrt{f_c \cdot C_f \cdot \frac{l_f}{d_f}} + f_{sy} \cdot \rho_{lt}}{0,27 \cdot \sqrt{f_c \cdot C_f \cdot \frac{l_f}{d_f}} + 0,68 \cdot f_c}
\end{aligned}$$

Eq. 42

Equação do Momento interno resistente da viga:

$$M_R = M_{st} + M_{sc} + M_{cf}$$

$$M_R = T_s \cdot z + C_c \cdot v + T_f \cdot e$$

$$M_R = \rho_{lt} \cdot b \cdot d \cdot f_{ys} \cdot z + \rho_{lc} \cdot b \cdot d \cdot f_{ys} \cdot v + f_{Ftu(2,5)} \cdot b \cdot (h - x) \cdot e$$

$$M_R = b \cdot [d \cdot f_{ys} \cdot (\rho_{lt} \cdot z + \rho_{lc} \cdot v) + f_{Ftu(2,5)} \cdot (h - x) \cdot e]$$

$$M_R = b \cdot \left[ d \cdot f_{ys} \cdot (\rho_{lt} \cdot z + k_s \cdot \rho_{lc} \cdot v) + 0,27 \cdot \sqrt{f_c \cdot C_f \cdot l_f / d_f} \cdot (h - x) \cdot e \right] \quad \text{Eq. 43}$$

$$z = d - 0,4 \cdot x \quad \text{Eq. 44}$$

$$e = \frac{h}{2} + \frac{x}{10} \quad \text{Eq. 45}$$

$$v = 0,4 \cdot x - d' \quad \text{Eq. 46}$$

Considerando  $k_s = 0$ :

$$M_R = b \cdot \left[ d \cdot f_{ys} \cdot (\rho_{lt} \cdot z + 0 \cdot \rho_{lc} \cdot v) + 0,27 \cdot \sqrt{f_c \cdot C_f \cdot l_f / d_f} \cdot (h - x) \cdot e \right]$$

$$M_R = b \cdot \left[ d \cdot f_{ys} \cdot \rho_{lt} \cdot z + 0,27 \cdot \sqrt{f_c \cdot C_f \cdot l_f / d_f} \cdot (h - x) \cdot e \right] \quad \text{Eq. 47}$$

Com relação aos resultados do critério de ruína proposto, a acurácia do mesmo foi avaliada em relação ao banco de dados por tentar prever a carga de ruptura,  $V_u$ , em função do deslocamento correspondente à ruptura  $\delta_u$  que consta no registro experimental, desse modo a relação do critério com o banco de dados foi julgada por meio do parâmetro  $\lambda$  que relaciona o registro experimental com o seu equivalente teórico obtido por meio do critério de ruína, conforme Equação 48. Nesse cenário a Tabela 19 apresenta o resumo estatístico da análise onde a Média indica uma relação propínqua entre o modelo e o banco de dados.

$$\lambda = \frac{V_{u,experimental}}{V_{u,critério}} \quad \text{Eq. 48}$$

Tabela 19. Resumo estatístico da análise do Critério de Ruína.

<b><i>Autor</i></b>	<b><i>Número de vigas</i></b>	<b><i>M</i></b>	<b><i>DP</i></b>	<b><i>CV</i></b>
AMIN e FOSTER (2016)	10	0,92	0,21	23,45%
AOUDE <i>et al.</i> (2012)	9	1,00	0,14	13,99%
CUCCIARA <i>et al.</i> (2004)	16	1,00	0,24	24,37%
DING <i>et al.</i> (2012)	16	0,91	0,11	12,14%
GALI e SUBRAMANIAM (2019)	9	1,30	0,26	20,28%
JONGVIVATSAKUL <i>et al.</i> (2013)	2	1,10	0,19	17,02%
KIM <i>et al.</i> (2017)	8	0,90	0,21	22,91%
YOU <i>et al.</i> (2010)	9	1,15	0,22	19,44%
<b><i>Resumo Geral</i></b>	<b><i>79</i></b>	<b><i>1,00</i></b>	<b><i>0,23</i></b>	<b><i>22,99%</i></b>

Fonte: Autor.

Com relação ao Coeficiente de Variação que ficou na ordem de 23%, comenta-se que alguns dos principais documentos com diretrizes de cálculo para a resistência ao cisalhamento de vigas de concreto com e sem fibras, a saber, RILEM TC 162 - TDF (2003), CECS 38 (2004), JSCE (2008), EHE 08 (2008) e FIB MODEL CODE 10 (2012) apresentam um *CV* em torno de 30% conforme demonstrado no trabalho de GOMES (2016), o fato do critério de ruína proposto apresentar um *CV* próximo ao dos modelos normativos, indica que a correlação entre os parâmetros da Equação 30 representa de modo adequado o fenômeno físico da resistência da peça variando em função do deslocamento. Adicionalmente, importa comentar que a diversidade de arranjos de reforço transversal contida no banco de dados não impactou na acurácia do Critério de Ruína por cisalhamento, pois contanto que o método usado para prever o valor de  $V_R$  seja assertivo, é indiferente o arranjo observado na viga, seja sem reforço algum, apenas fibras, apenas estribos ou híbrido de fibras e estribos, a relação física da resistência com a deflexão não se altera, e nesse contexto as diretrizes do FIB MODEL CODE 10 (2012) conseguem cobrir essa diversidade de arranjos de reforços transversais de forma competente, o que acaba por expandir o alcance da solução proposta.

Para ilustrar a resposta completa do Critério de Ruína é apresentada a Figura 47 que ilustra o comportamento de algumas vigas pinçadas dos trabalhos de AOUDE *et. al* (2012) e CUCCIARA *et al.* (2004) conforme a Tabela 20 — as informações básicas das vigas podem ser consultadas nas seções 2.2.1 e 2.2.2 que detalham os trabalhos dos referidos autores. Com relação aos resultados é possível observar que as vigas tiveram seus modos de ruptura representados de forma precisa, com exceção da viga A1%, nesse caso é possível notar que o ponto referente ao escoamento é detectado de forma adequada, no entanto a ductilidade da peça não foi representada de forma assertiva, isso se deve ao fato do modelo indicar que a resistência

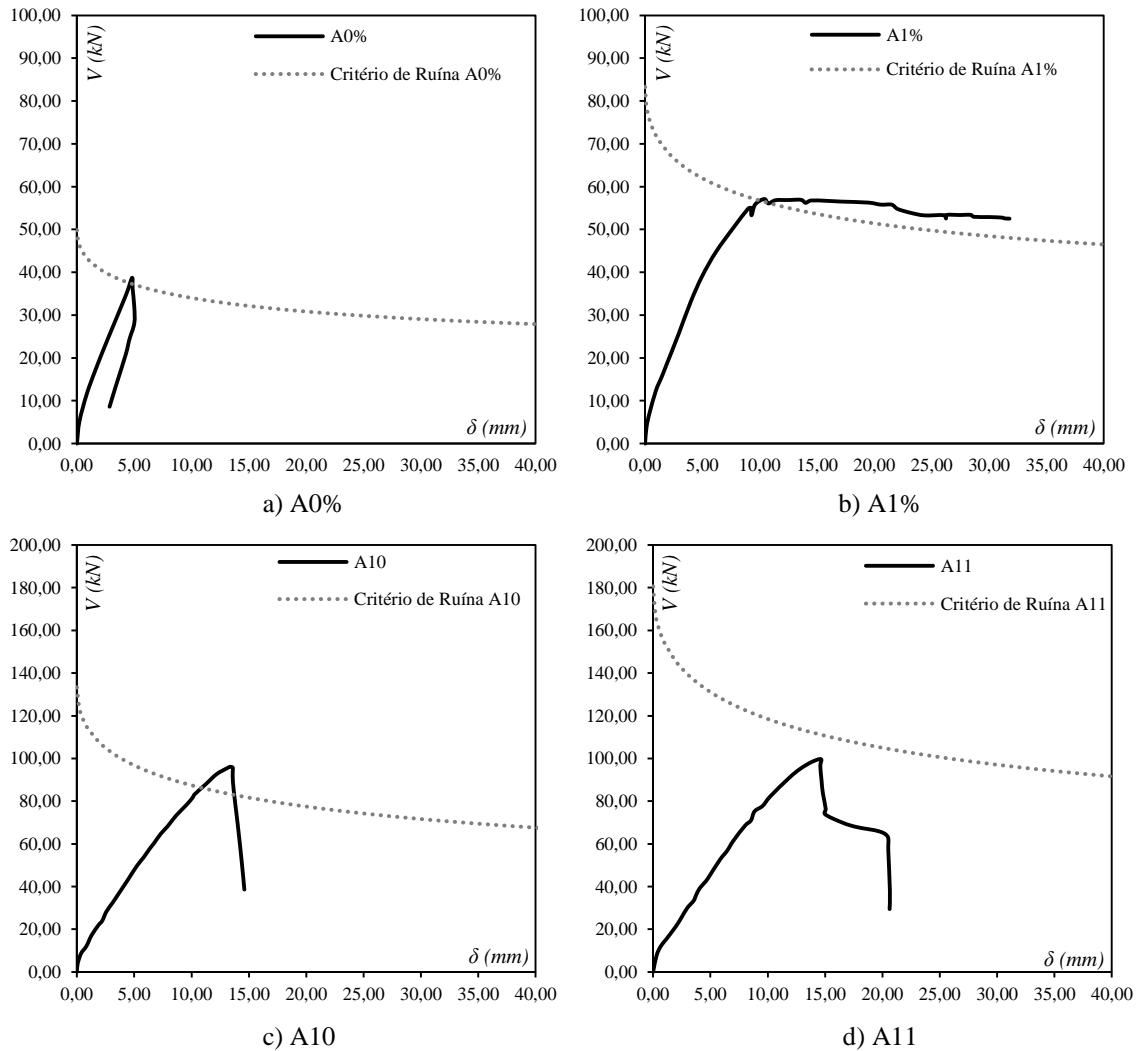
ao cisalhamento é praticamente igual à de flexão, conforme ilustra os parâmetros  $M_V$  e  $M_R$  na Tabela 20, logo o critério de ruína não conseguiu distinguir de forma clara o modo de colapso.

Tabela 20. Parâmetros para representação gráfica do critério de ruína por cisalhamento (1).

Viga	Autor	$V_R$ (kN)	$M_V$ (kN·m)	$M_R$ (kN·m)	$\alpha$	$\beta$
A0%	AOUDE <i>et al</i> (2012)	34,09	20,46	32,47	1,0337	1,0556
A1%	AOUDE <i>et al</i> (2012)	56,00	33,60	33,28	1,0337	1,0556
A10	CUCCHIARA <i>et al.</i> (2004)	84,22	51,64	72,80	1,0446	1,0556
A11	CUCCHIARA <i>et al.</i> (2004)	84,22	69,07	72,80	1,0446	1,0556
B02	CUCCHIARA <i>et al.</i> (2004)	49,58	63,21	69,96	1,0625	1,0556
B12	CUCCHIARA <i>et al.</i> (2004)	84,22	78,38	72,80	1,0625	1,0556

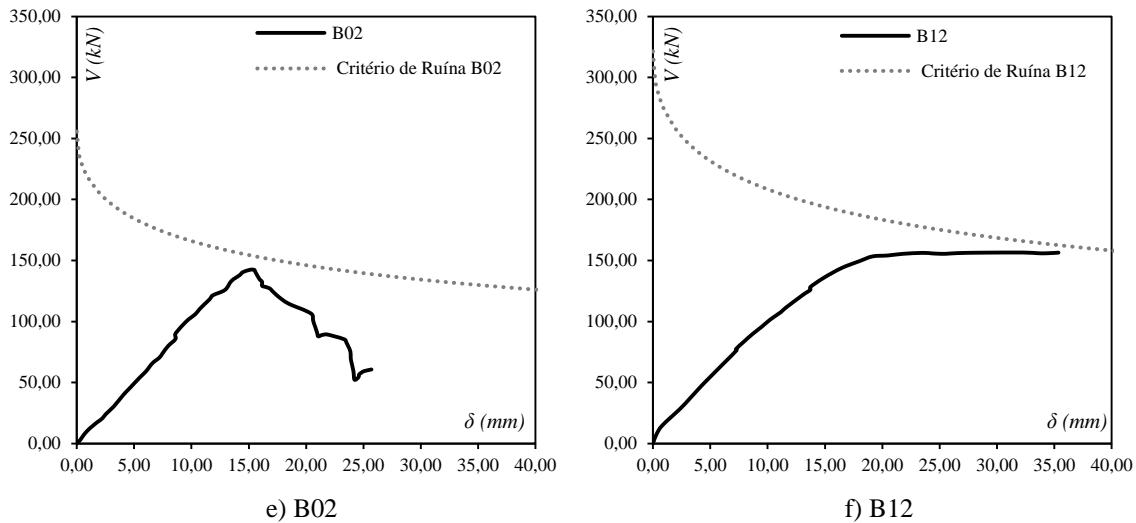
Fonte: Autor.

Figura 47. Exemplos de aplicação do Critério de Ruína.



Fonte: Autor.

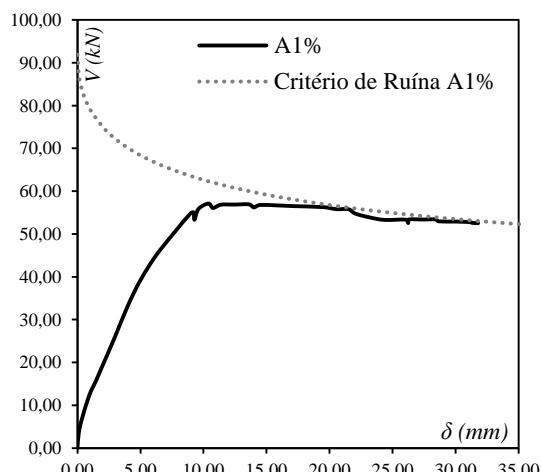
Figura 47. Exemplos de aplicação do Critério de Ruína (Continuação).



Fonte: Autor

Para reforçar a argumentação é apresentada a Figura 48, onde foi feito um incremento de 10% (5,6 kN) na grandeza  $V_R$ , de 56,0 kN para 61,6 kN, nesse cenário o critério consegue representar de forma adequada a ductilidade da viga, esse pequeno incremento foi suficiente para representar de forma adequada o comportamento do elemento, indicando a sensibilidade do critério, e confirmando que em casos onde as resistências de flexão e cisalhamento são fronteiriças pode ser difícil representar os registros experimentais de forma propínqua.

Figura 48. Análise do Critério de Ruína da viga A1%.



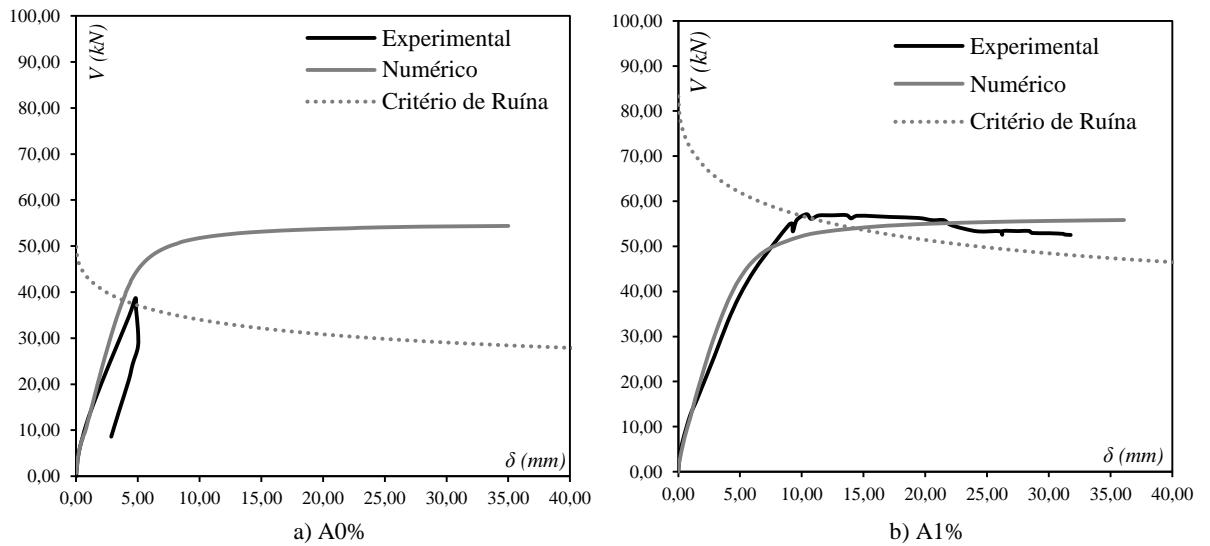
Fonte: Autor

## 5 INTEGRAÇÃO DOS MODELOS DE FLEXÃO E CISALHAMENTO

Com as abordagens numéricas tanto da flexão como do cisalhamento estabelecidas, é possível unificá-las em uma análise global, nesse cenário a Figura 49 ilustra a interação entre os modelos,

onde são analisadas as vigas A0% e A1% do trabalho de AOUDE *et al.* (2012), na imagem é possível observar que a proposta consegue prever o comportamento das vigas de forma adequada, no caso da viga A1% é possível observar que o registro numérico aponta para a ruptura por cisalhamento após o escoamento da armadura de flexão, o que indica que a curva seria interrompido antes do estabelecido no ensaio de referência, indicando que seria preciso aumentar a resistência ao cisalhamento da viga para que seu comportamento dúctil seja manifestado em sua completude, apesar de ser uma divergência em relação ao registro experimental, isso não desluz o potencial da solução proposta, pois nesse caso o aumento na resistência cisalhante aplicado no modelo não ficaria tão distante da realidade – em torno de 10% como comentado previamente –, credenciando o modelo como uma possível ferramenta de dimensionamento.

Figura 49. Interação entre os modelos de flexão e cisalhamento.



Fonte: Autor.

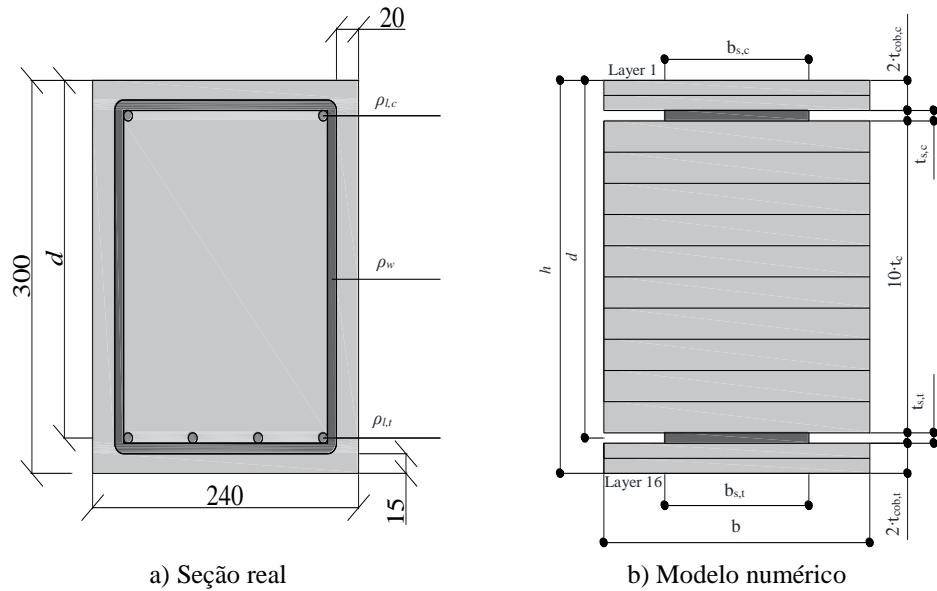
## 6 ANÁLISE PARAMÉTRICA

Neste momento da pesquisa a metodologia outrora desenvolvida será empregada em análises paramétricas para avaliar numericamente a possibilidade da supressão dos reforços convencionais, barras longitudinais e estribos, substituindo-os pela fibra de aço enquanto reforço majoritário da viga, mantendo a rigidez em serviço e um comportamento dúctil apropriado. Adicionalmente, almeja-se avaliar também o comportamento do critério de ruína em vigas externas ao banco de dados usado no desenvolvimento da proposta, para viabilizar o tentame são tomadas como referência quatro vigas do trabalho de DANCYGIER e

BERKOVER (2016), mais precisamente os espécimes NF-0-063, 0-094, NF-0-126 e NF-0-330, que possuem diferentes taxas de reforço longitudinal e transversal, possibilitando assim uma análise mais exaustiva.

Nesse cenário, inicia-se a discussão por meio da modelagem das vigas de referência, a Figura 50 coteja as vigas reais com seus equivalentes numéricos, adicionalmente a Tabela 21 indica as dimensões das camadas que compõe os modelos. No que se refere aos materiais, as leis constitutivas apresentadas na presente pesquisa foram aplicadas com base nos registros experimentais, e os resultados são apresentados nas Tabelas 22 e 23, por fim, para representar o comportamento ao cisalhamento das vigas, a Tabela 24 indica os parâmetros necessários para representação do critério de ruína, destaca-se que o modelo estipulado para calcular a resistência à flexão conseguiu prever com exatidão os valores reais das vigas, pois nota-se que o parâmetro  $\lambda$  que correlaciona as cargas resistentes de flexão,  $V_{flex}$ , experimental e teórica – que por sua vez foi obtida a partir do modelo de flexão simplificado proposto na presente pesquisa – fica próximo de 1,00 em todos os casos, ademais a tabela 25 expõe as propriedades do aço do reforço transversal que compõe a viga.

Figura 50. Modelagem das vigas de referência para a análise paramétrica.



Fonte: Autor.

Tabela 21. Dimensões dos Layers do modelo numérico (3).

Vigas	Layers (mm)							
	$b$	$t_{cob,c}$	$b_{s,c}$	$t_{s,c}$	$t_c$	$b_{s,t}$	$t_{s,t}$	$t_{cob,t}$
NF-0-063	240,0000	12,5000	12,5600	8,0000	22,6000	25,1200	16,0000	12,5000
0-094	240,0000	12,5000	12,5600	8,0000	22,6000	37,6800	16,0000	12,5000
NF-0-126	240,0000	12,5000	12,5600	8,0000	22,6000	50,2400	16,0000	12,5000
NF-0-330	240,0000	12,5000	12,5600	8,0000	19,8000	86,3500	22,0000	23,5000

Fonte: Autor.

Tabela 22. Lei constitutiva do concreto (3).

Vigas	Compressão				Tração				
	$f_c$ (MPa)	$E_c$ (GPa)	$\varepsilon_{fc}$ (%)	$\varepsilon_{cu}$ (%)	$f_{ct}$ (MPa)	$f_{Rts}$ (MPa)	$f_{Rcf}$ (MPa)	$\varepsilon_{Uts}$ (%)	$\varepsilon_{Ucf}$ (%)
NF-0-063	34,60	32,52	2,00	3,50	2,67	1,20	-	2,41	-
0-094	36,20	33,01	2,00	3,50	2,78	1,25	-	1,97	-
NF-0-126	33,60	32,20	2,00	3,50	2,61	1,17	-	1,71	-
NF-0-330	29,80	30,94	2,00	3,50	2,34	1,05	-	1,53	-

Fonte: Autor.

Tabela 23. Lei constitutiva do aço do reforço longitudinal (3).

Viga	$f_{sy}$ (MPa)	$\varepsilon_{sy}$ (%)	$f_{su}$ (MPa)	$\varepsilon_{su}$ (%)	$E_s$ (GPa)
NF-0-063	472,00	2,30	557,00	7,90	205,00
0-094	472,00	2,30	557,00	7,90	205,00
NF-0-126	412,00	2,01	667,00	12,10	205,00
NF-0-330	412,00	2,01	672,00	12,50	205,00

Fonte: Autor.

Tabela 24. Parâmetros para representação gráfica do critério de ruína por cisalhamento (2).

Viga	$V_R$ (kN)	$M_v$ (kN·m)	$M_R$ (kN·m)	$\alpha$	$\beta$	$V_{flex,exp}$ (kN)	$V_{flex,teo}$ (kN)	$\lambda$ (exp / teo)
NF-0-063	137,95	117,25	48,30	1,0356	1,0417	56,85	56,83	1,00
0-094-1	222,00	188,70	70,18	1,0356	1,0417	81,14	82,57	0,98
NF-0-126-1	228,61	194,32	80,84	1,0356	1,0417	90,65	95,11	0,95
NF-0-330	277,84	236,17	139,01	1,0356	1,0417	164,85	163,54	1,01

Fonte: Autor.

Tabela 25. Lei constitutiva do aço do reforço transversal.

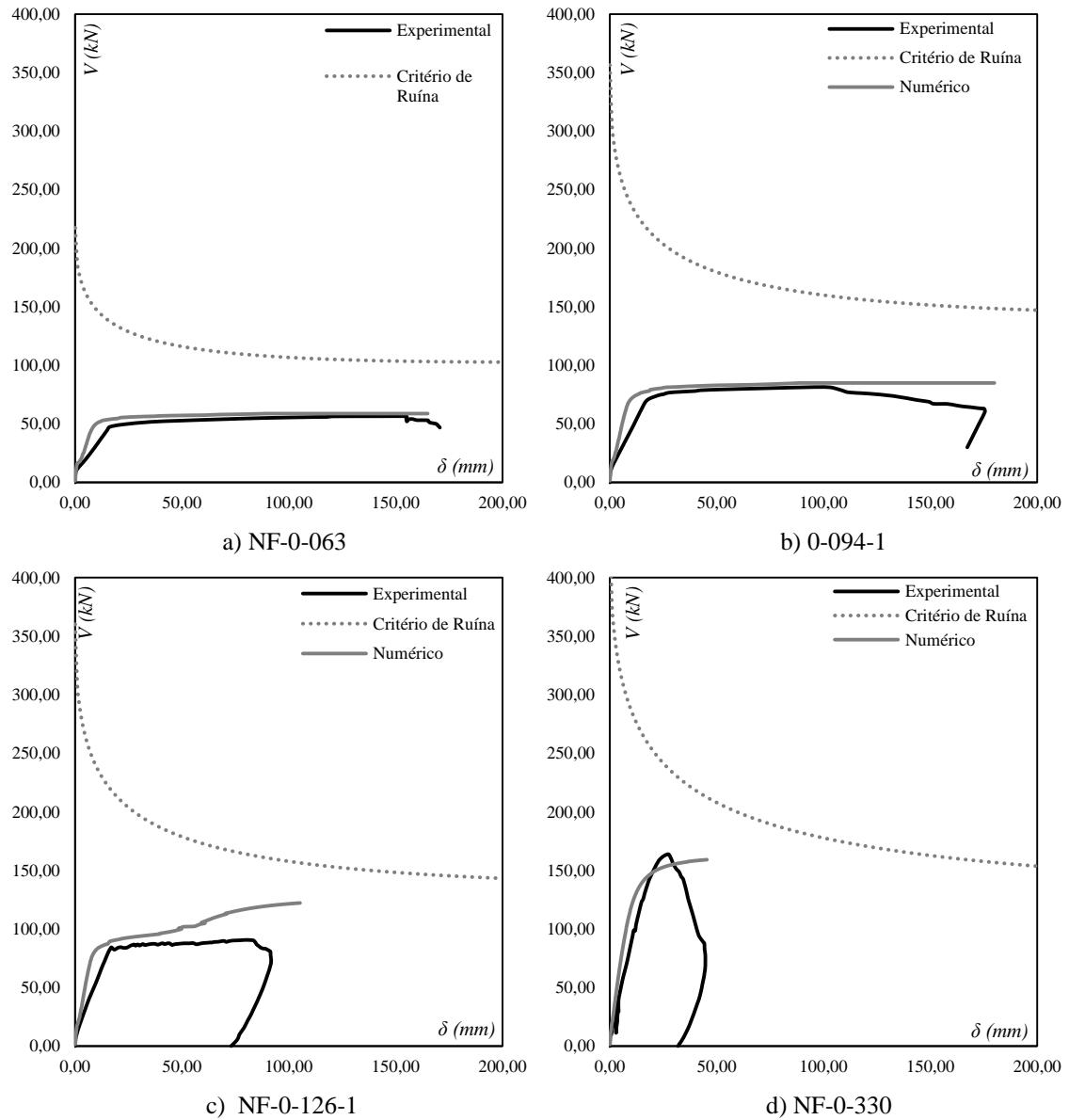
Aço	$f_{sy}$ (MPa)	$\varepsilon_{sy}$ (%)	$f_{su}$ (MPa)	$\varepsilon_{su}$ (%)	$E_s$ (GPa)
$\phi\text{-}w$ (10 mm)	409,00	2,00	578,00	9,00	205,00

Fonte: Autor

Concernente ao resultado das modelagens, Figura 51, comenta-se que de forma geral os registros experimentais foram representados de forma adequada por seus correspondentes numéricos, no entanto as viga NF-0-126 apresenta um modo de ruptura que se baseia na formação de uma rótula plástica localizada nas barras que compõem o reforço longitudinal tracionado, conforme explicado por DANCYGIER e BERKOVER (2016), o que acaba por antecipar a ruína da peça, o modelo proposto na corrente pesquisa não é capaz de reproduzir esse modo de ruína específico, no entanto a tendência geral de comportamento antes da ruptura

localizada é representada de forma adequada, com relação ao critério de ruína, reporta-se que o mesmo representou de forma fidedigna o modo de colapso das vigas, a saber, por flexão.

Figura 51. Resultado da modelagem das vigas de referência.



Fonte: Autor.

Prosseguindo, informa-se que para avaliar a supressão dos reforços convencionais, serão trabalhados fatores que busquem potencializar a substituição por fibras de aço, nesse cenário a resistência à compressão do concreto e a otimização da inércia da seção serão manuseadas, sendo assim, vigas hipotéticas divididas em duas séries serão modeladas com a metodologia até aqui estabelecida e cotejadas com os elementos de referência.

Na primeira série de vigas, denominada de FC60-CF2-R $\phi$ , o  $f_c$  e as fibras de aço serão associados para potencializar o CRFA visando a supressão dos reforços convencionais, onde FC60 indica um  $f_c$  de 60 MPa, CF2 um consumo de fibras de 2% e R $\phi$  o arranjo do reforço. Já a segunda série, FC60-CF2-R $\phi$ -H, além de associar a resistência do concreto e as fibras, também inclui a otimização da geometria da seção, nesse grupo as vigas foram idealizadas para apresentar a maior inércia possível, porém sem alterar a área da seção transversal – e consequentemente sem modificar o volume de concreto que seria demandado na confecção da viga –, no entanto sem comprometer a estabilidade lateral ou apresentar dimensões com valores distantes dos usualmente praticado em vigas, portanto a altura da peças foram mantidas em múltiplos de 5 cm e com valores de base não inferiores à 12 cm.

Por fim a Tabela 26 exprime o resumo das principais informações das vigas idealizadas, ainda sobre a estabilidade lateral comunica-se que a mesma foi verificada de acordo com as diretrizes do FIB MODEL CODE 10 (2012), expressas por intermédio da Equação 49, onde  $l_0$  indica o comprimento efetivo da viga – no caso de vigas biapoiadas é expressa pela distância entre apoios. Concernente ao CRFA estipulado na análise, comunica-se que a fibra de aço considerada no material foi do tipo *hooked end*, comprimento  $l_f = 60$  mm, diâmetro  $d_f = 0,75$  mm e fator de forma  $l_f/d_f = 80$ , conforme indicado na Figura 52, essa fibra em um consumo  $C_f$  de 2,0% foi adotada visando extrair o máximo desempenho do concreto com fibras, mas dentro dos limites usualmente encontrados em trabalhos experimentais, pois ao considerar uma fibra ainda mais esbelta ou um consumo maior, a análise estaria se apoiando em mera especulação.

$$\frac{l_0}{b} \leq \frac{50}{\sqrt[3]{h/b}} \quad \text{Eq. 49}$$

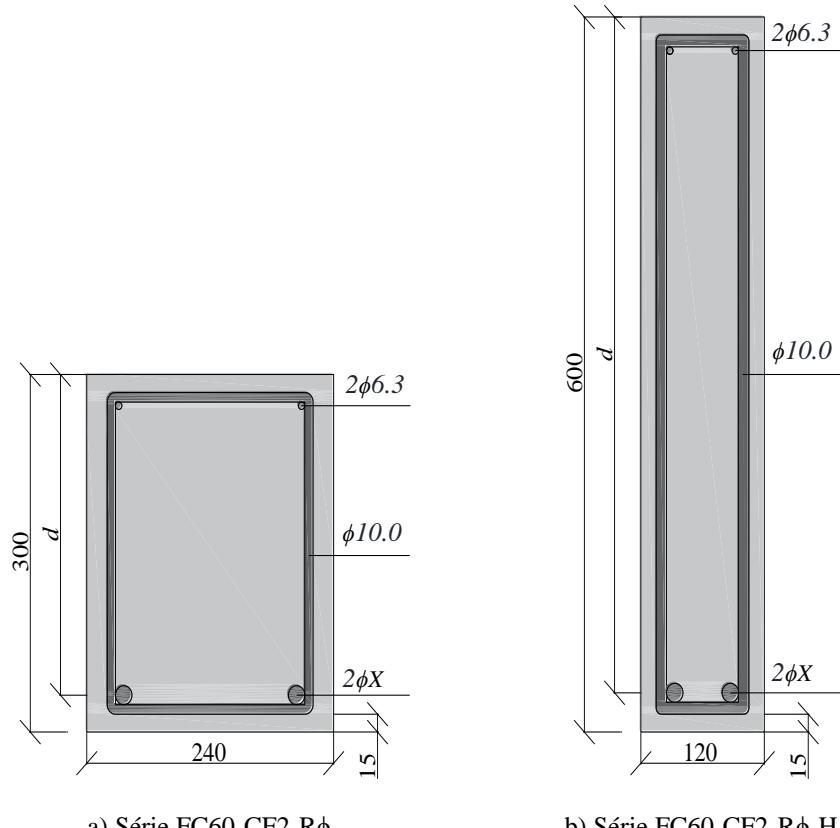
Verificação da Estabilidade Lateral:

$$\frac{l_0}{b} \leq \frac{50}{\sqrt[3]{h/b}}$$

$$\frac{3200}{120} \leq \frac{50}{\sqrt[3]{600/120}}$$

27  $\leq$  29 (Condição de estabilidade lateral atendida).

Figura 52. Vigas idealizadas para a análise paramétrica.



Fonte: Autor.

Tabela 26. Informações básicas das vigas hipotéticas.

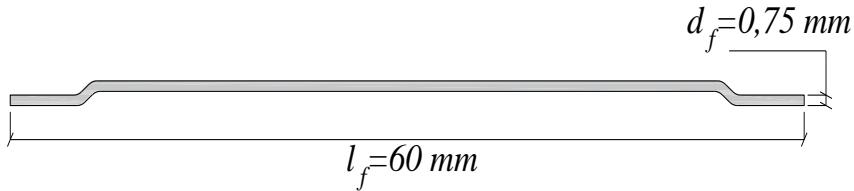
Viga	$b \times h$ (mm <sup>2</sup> )	$d$ (mm)	$f_c$ (MPa)	$C_f$ (%)	$l_f/d_f$	$\rho_{l,t}$ (%)	$\rho_{l,c}$ (%)
FC60-CF2-R06	240x300	272	60,00	2,00	80	0,10 (2 $\phi$ 6.3)	0,10 (2 $\phi$ 6.3)
FC60-CF2-R08	240x300	271	60,00	2,00	80	0,15 (2 $\phi$ 8.0)	0,10 (2 $\phi$ 6.3)
FC60-CF2-R10	240x300	270	60,00	2,00	80	0,24 (2 $\phi$ 10.0)	0,10 (2 $\phi$ 6.3)
FC60-CF2-R12	240x300	269	60,00	2,00	80	0,38 (2 $\phi$ 12.5)	0,10 (2 $\phi$ 6.3)
FC60-CF2-R16	240x300	267	60,00	2,00	80	0,63 (2 $\phi$ 16.0)	0,10 (2 $\phi$ 6.3)
FC60-CF2-R06-H	120x600	572	60,00	2,00	80	0,09 (2 $\phi$ 6.3)	0,09 (2 $\phi$ 6.3)
FC60-CF2-R08-H	120x600	571	60,00	2,00	80	0,15 (2 $\phi$ 8.0)	0,09 (2 $\phi$ 6.3)
FC60-CF2-R10-H	120x600	570	60,00	2,00	80	0,23 (2 $\phi$ 10.0)	0,09 (2 $\phi$ 6.3)
FC60-CF2-R12-H	120x600	569	60,00	2,00	80	0,36 (2 $\phi$ 12.5)	0,09 (2 $\phi$ 6.3)
FC60-CF2-R16-H	120x600	567	60,00	2,00	80	0,59 (2 $\phi$ 16.0)	0,09 (2 $\phi$ 6.3)

Fonte: Autor.

Com relação aos reforços convencionais, comenta-se que nas vigas hipotéticas os estribos foram mantidos com o mesmo arranjo – dois ramos e  $\phi 10.0$  – e mesmas propriedades físicas do aço observado nas vigas de referência, para que a única variável observada na análise da supressão da armadura transversal seja o espaçamento e consequentemente a taxa de armadura

linear em  $mm^2/m$ . Concernente ao reforço longitudinal, foi usado o raciocínio análogo, nas vigas de referência foram manuseados três tipos de aço diferentes, de modo que as vigas hipotéticas foram modeladas com os mesmo três tipos de aço distintos, de maneira que no momento da comparação com os elementos de referência, a variável de análise seja a área de aço longitudinal.

Figura 53. Fibra de aço idealizada na análise paramétrica.



Fonte: Autor.

Prosseguindo, inicialmente a análise será feita com base na resposta à flexão das vigas, as respostas *carga-deslocamento*,  $V-\delta$ , das vigas hipotéticas serão sobrepostas às de referência, de modo a observar qual peça apresenta desempenho equivalente ao elemento base, posteriormente o critério de ruína será acionado para avaliar se a viga hipotética selecionada possui a ductilidade adequada, por fim, após constatar que a peça atende aos critérios estabelecidos será observado o quanto de reforço convencional foi suprimido.

Tabela 27. Dimensões dos Layers do modelo numérico (4).

Vigas	Layers (mm)							
	$b$	$t_{cob,c}$	$b_{s,c}$	$t_{s,c}$	$t_c$	$b_{s,t}$	$t_{s,t}$	$t_{cob,t}$
FC60-CF2-R06	240,000	12,500	9,896	6,300	23,740	9,896	6,300	12,500
FC60-CF2-R08	240,000	12,500	9,896	6,300	23,570	12,566	8,000	12,500
FC60-CF2-R10	240,000	12,500	9,896	6,300	23,370	15,708	10,000	12,500
FC60-CF2-R12	240,000	12,500	9,896	6,300	23,120	19,635	12,500	12,500
FC60-CF2-R16	240,000	12,500	9,896	6,300	22,770	25,133	16,000	12,500
FC60-CF2-R06-H	120,000	12,500	9,896	6,300	53,740	9,896	6,300	12,500
FC60-CF2-R08-H	120,000	12,500	9,896	6,300	53,570	12,566	8,000	12,500
FC60-CF2-R10-H	120,000	12,500	9,896	6,300	53,370	15,708	10,000	12,500
FC60-CF2-R12-H	120,000	12,500	9,896	6,300	53,120	19,635	12,500	12,500
FC60-CF2-R16-H	120,000	12,500	9,896	6,300	52,770	25,133	16,000	12,500

Fonte: Autor.

Como de praxe até aqui, inicia-se a modelagem com a configuração do modelo de camadas, nesse cenário a Tabela 27 exprime as dimensões dos *layers* dos modelos que representam cada uma das seções hipotéticas seguindo a mesma disposição da Figura 50b. Comentando agora sobre os materiais, a Tabela 28 apresenta a lei constitutiva do concreto idealizado para compor as seções, ao passo que a Tabela 29 exprime as propriedades dos aços, como já estabelecido

previamente cada aço será selecionado de acordo com a viga de referência para que a única variável observada seja a taxa de armadura longitudinal.

Tabela 28. Lei constitutiva do concreto (4).

Concreto	Compressão				Tração				
	$f_c$ (MPa)	$E_c$ (GPa)	$\varepsilon_{fc}$ (%)	$\varepsilon_{cu}$ (%)	$f_{ct}$ (MPa)	$f_{Rts}$ (MPa)	$f_{Rcf}$ (MPa)	$\varepsilon_{Uts}$ (%)	$\varepsilon_{Ucf}$ (%)
FC60-CF2	60,00	39,07	2,69	3,33	4,30	-	4,29	-	20,00

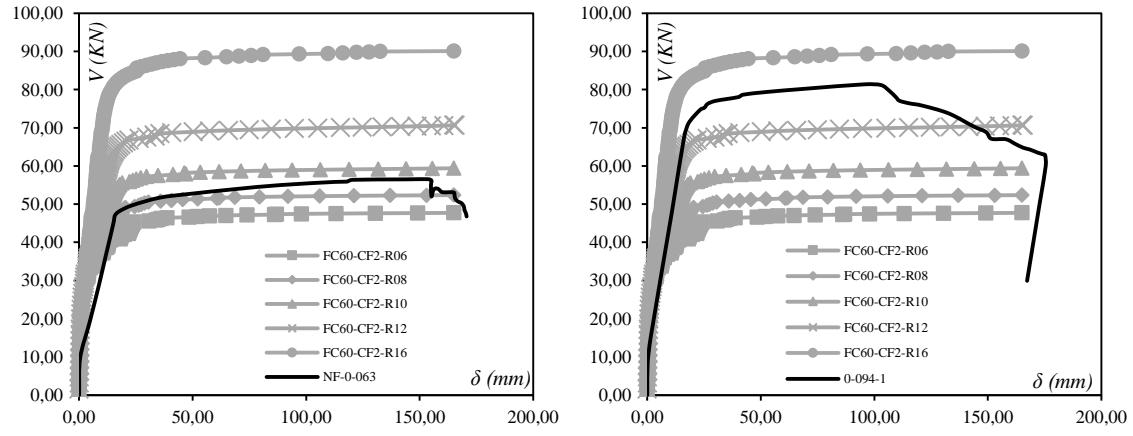
Fonte: Autor.

Tabela 29. Lei constitutiva do aço do reforço longitudinal (4).

Aço	$f_{sy}$ (MPa)	$\varepsilon_{sy}$ (%)	$f_{su}$ (MPa)	$\varepsilon_{su}$ (%)	$E_s$ (GPa)
$\phi$ -1	472,00	2,30	557,00	7,90	205,00
$\phi$ -2	412,00	2,01	667,00	12,10	205,00
$\phi$ -3	412,00	2,01	672,00	12,50	205,00

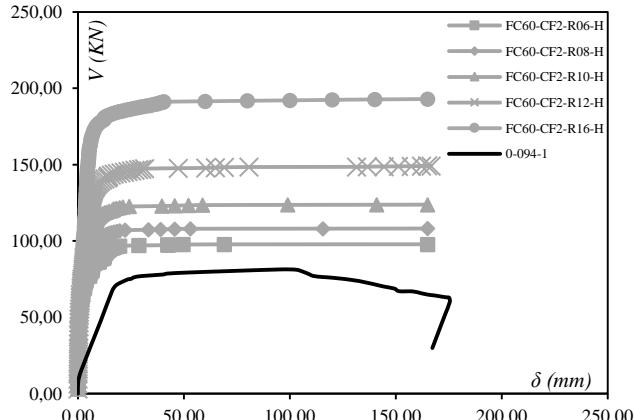
Fonte: Autor.

Figura 54. Análise paramétrica de flexão das vigas com o aço  $\phi$ -1.



a) NF-0-063 (análise da Resistência + Fibras)

b) 0-094-1 (análise da Resistência + Fibras)



c) 0-094-1 (análise da Resistência + Fibras + Inércia)

Fonte: Autor.

Iniciando a discussão dos resultados, é apresentada Figura 54, que coteja as vigas de referência NF-0-63 e 0-094-1 com as vigas hipotéticas – portanto a imagem reúne as vigas reforçadas

longitudinalmente com aço  $\phi\text{-}1$  –, no item 54a é possível notar que o elemento CF60-CF2-R08 apresenta desempenho equivalente à viga de referência NF-0-63, portanto, nesse cenário o aumento de  $f_c$  de 34,60 para 60,00 MPa em conjunto com a adição de 2% de consumo de fibras resultou em uma redução na taxa de armadura longitudinal de 0,63% (2 $\phi$ 16.0) para 0,15% (2 $\phi$ 8.0), supressão de 75%. Prosseguindo, compulsando agora o a Figura 54b, observa-se que o elemento que apresentou a resposta mais próxima ao elemento de referência, 0-094-1, foi a viga CF60-CF2-R16, resultando em uma supressão do reforço longitudinal, em termos de taxa geométrica, de 0,94% (3 $\phi$ 16.0) para 0,63% (2 $\phi$ 16.0), redução de 33,33%.

Ainda comentando sobre a viga 0-094-1, agora no contexto da Figura 54c, observa-se que a viga CF60-CF2-R06-H já apresenta desempenho equivalente ao elemento de referência, nesse cenário além do aumento do  $f_c$  – de 36,20 para 60 MPa – e do acréscimo de fibras de aço, a otimização da seção também foi efetuada, considerando a seção bruta de concreto há um aumento de 4 vezes na inércia, no presente contexto foi aferida uma supressão da taxa de reforço longitudinal de 0,94% (3 $\phi$ 16.0) para 0,10% (2 $\phi$ 6.3), redução de 84,50%.

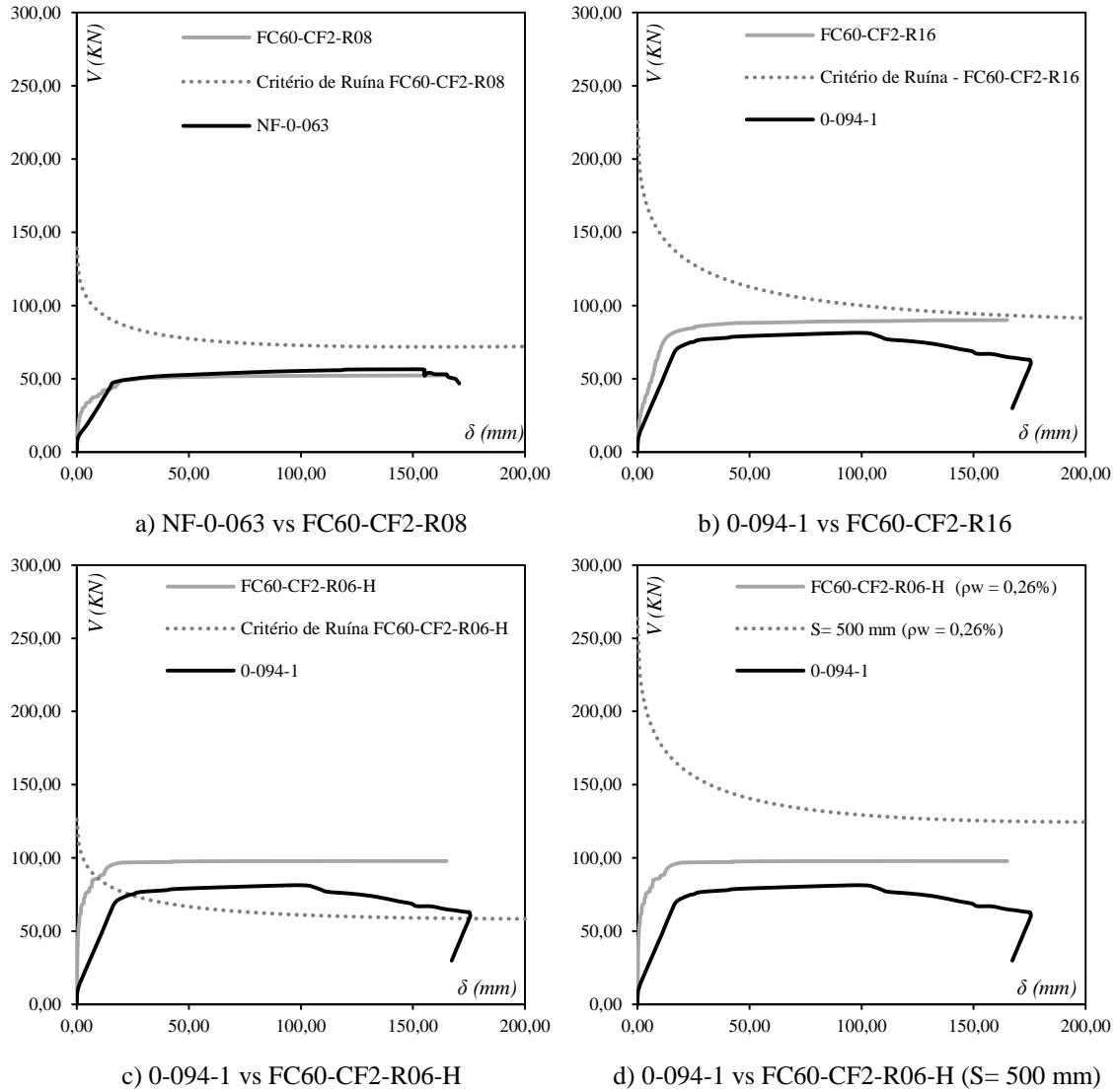
Prosseguindo, identificadas as vigas hipotéticas com desempenho símile às vigas de referência, é necessário averiguar se as mesmas possuem performance ao cisalhamento satisfatória, para viabilizar a análise, a Tabela 30 apresenta os parâmetros para representação do critério de ruína, em seguida é apresentada a Figura 55 que ilustra a análise do comportamento ao cisalhamento das vigas hipotéticas, no presente contexto é possível observar que as vigas FC60-CF2-R08 (item 55a) e FC60-CF2-R16 (item 55b) manifestam todo o seu comportamento dúctil, sem apresentar ruptura antecipada por cisalhamento mesmo sem adição de estribos, viabilizando uma redução de 100% dos reforços convencionais em relação aos elementos NF-0-63 e 0-094-1 respectivamente.

Tabela 30. Parâmetros do critério de ruína por cisalhamento das vigas com o aço  $\phi\text{-}1$ .

Viga	$V_R$ (kN)	$M_V$ (kN·m)	$M_R$ (kN·m)	$\alpha$	$\beta$	$S$ (mm)	$\rho_w$ (mm <sup>2</sup> /m)
NF-0-063	137,95	117,25	48,30	1,0356	1,0417	200,00	785,00
0-094-1	222,00	188,70	70,18	1,0356	1,0417	100,00	1570,00
FC60-CF2-R08	89,53	76,10	38,87	1,0399	1,0417	-	0,00
FC60-CF2-R16	142,80	121,38	73,79	1,0393	1,0417	-	0,00
FC60-CF2-R06-H	68,21	57,98	70,06	1,0841	1,1667	-	0,00
FC60-CF2-R06-H ( $\rho_w = 0,26\%$ )	134,33	114,18	70,06	1,0841	1,1667	500,00	314,00

Fonte: Autor.

Figura 55. Análise paramétrica de cisalhamento das vigas com o aço  $\phi$ -I.

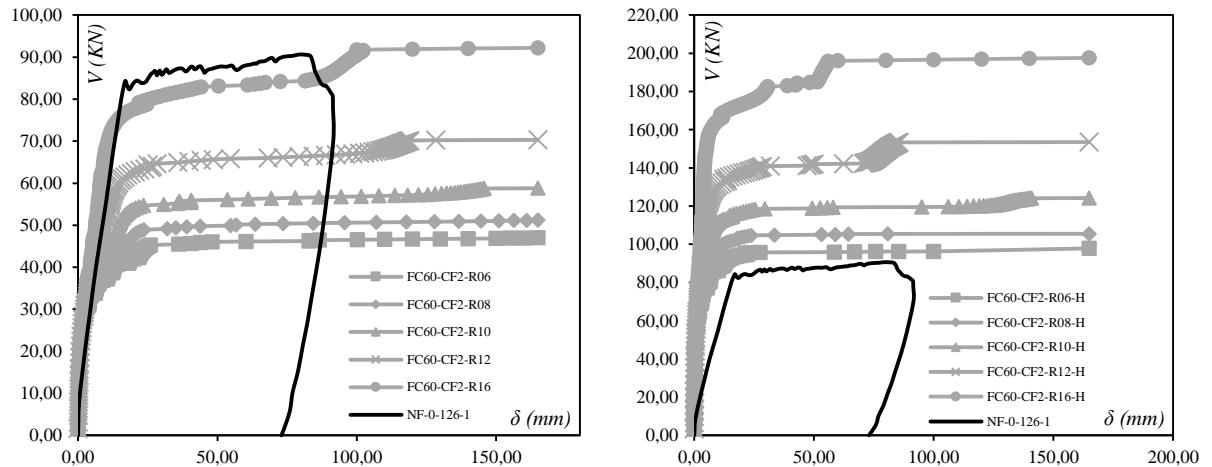


Fonte: Autor.

já a viga FC60-CF2-R06-H (item 55c) apresenta ruptura antecipada por cisalhamento, isso se deve ao fato da viga ter maior altura e menor taxa de reforço longitudinal, e o modelo usado para descrever a resistência ao cisalhamento das peças, FIB MODEL CODE 10 (2012), pondera o efeito escala, que é a redução da contribuição do concreto conforme a altura útil da peça aumenta, e o efeito pino, sendo esse a contribuição da armadura longitudinal, portanto essa combinação de elevada altura e baixa taxa de reforço acaba por penalizar a resistência ao esforço cortante da viga, deste modo se faz necessária a implementação de reforço convencional, no presente caso os estribos foram idealizados com espaçamento  $S = 500 \text{ mm}$ , o que resulta em uma taxa geométrica de 0,26% e taxa linear de  $314,00 \text{ mm}^2/\text{m}$ , com a adição do reforço é possível observar na imagem 55d que a viga não mais apresenta a ruptura antecipada,

e por conseguinte manifesta ductilidade apropriada, auferindo redução de 80,0% na disposição dos estribos em relação à viga de referência 0-094-1.

Figura 56. Análise paramétrica de flexão das vigas com o aço  $\phi$ -2.



a) NF-0-126-1 (análise da Resistência + Fibras) b) NF-0-126-1 (análise da Resistência + Fibras + Inércia)

Fonte: Autor.

Sequencialmente é apresentada a Figura 56, que coteja a viga de referência NF-0-126-1 com os elementos hipotéticos. Como já estabelecido, nesse primeiro momento é observado o comportamento à flexão, sob essa ótica é possível observar que os espécimes FC60-CF2-R16 e FC60-CF2-R06-H apresentam desempenho equivalente ao elemento base, viabilizando supressões do reforço longitudinal na ordem de 50% (4 $\phi$ 16.0 para 2 $\phi$ 16.0) e 92,25% (4 $\phi$ 16.0 para 2 $\phi$ 6.3) respectivamente.

Tabela 31. Parâmetros do critério de ruína por cisalhamento das vigas com o aço  $\phi$ -2.

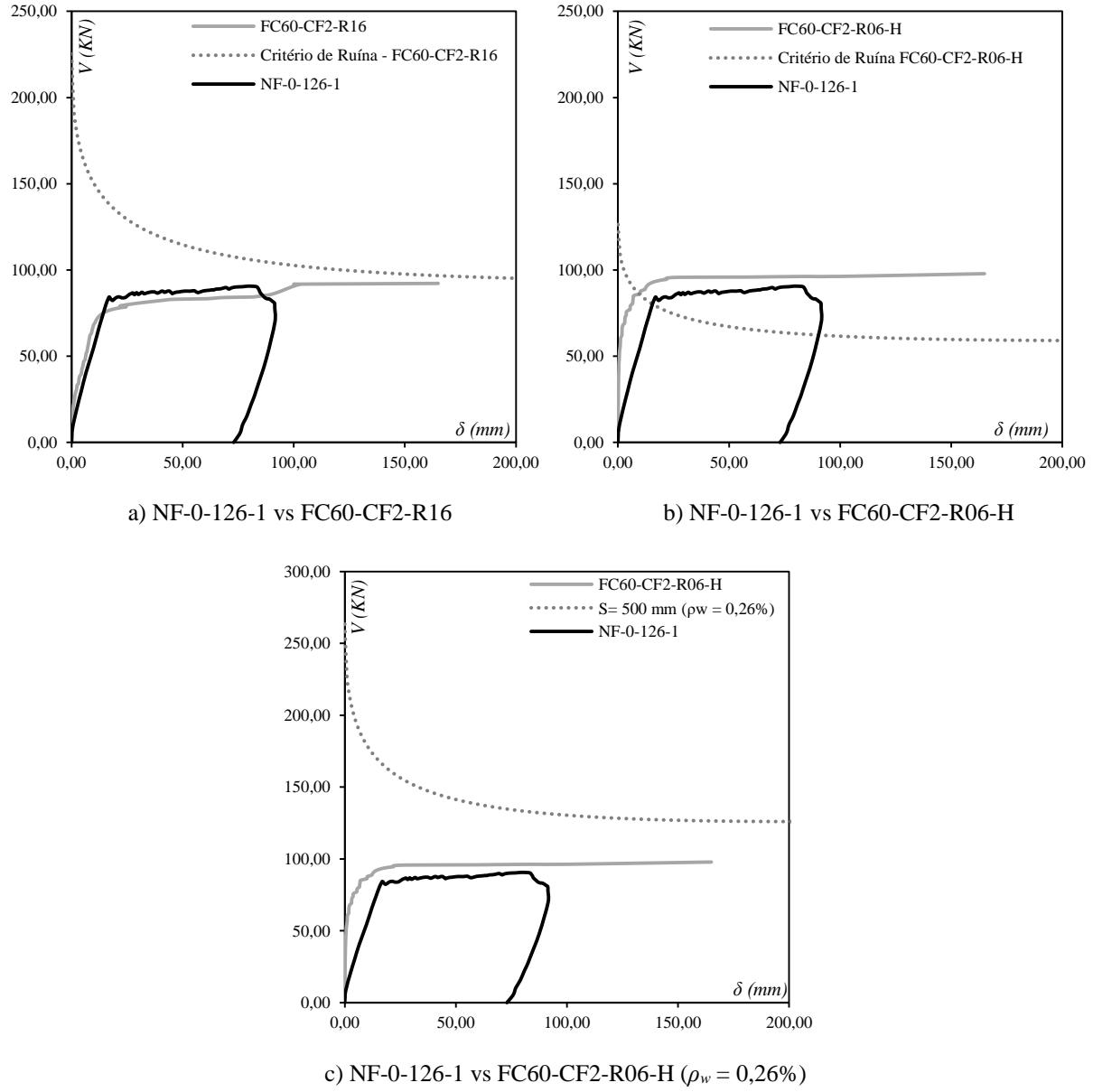
Viga	$V_R$ (kN)	$M_V$ (kN·m)	$M_R$ (kN·m)	$\alpha$	$\beta$	$S$ (mm)	$\rho_w$ ( $\text{mm}^2/\text{m}$ )
NF-0-126-1	228,61	194,32	80,84	1,0356	1,0417	100,00	1570,00
FC60-CF2-R16	142,80	121,38	68,02	1,0393	1,0417	-	0,00
FC60-CF2-R06-H	68,21	57,98	68,07	1,0841	1,1667	-	0,00
FC60-CF2-R06-H ( $\rho_w = 0,26\%$ )	134,33	114,18	68,07	1,0841	1,1667	500,00	314,00

Fonte: Autor.

Comentando agora sobre a Figura 57, que apresenta a análise de cisalhamento feita através do critério de ruína que foi traçado com base nos parâmetros descritos na Tabela 31, no item 57a é possível observar que a viga FC60-CF2-R16 se mostra segura quanto ao esforço cortante, indicando supressão de 100% dos estribos em relação ao elemento de referência, compulsando agora o item 57b nota-se que o elemento FC60-CF2-R06-H apresenta ruptura por cisalhamento, como já comentado anteriormente esse fenômeno que atinge as vigas de seção otimizada é

oriundo do efeito escala e do efeito pino ponderado no modelo do FIB MODEL CODE 10 (2012), para contornar o infortúnio recorreu-se ao reforço convencional com espaçamento de 500 mm conforme indicado na Figura 57c, ainda assim é auferida uma redução de 80% dos estribos em relação à peça de referência NF-0-126-1.

Figura 57. Análise paramétrica de cisalhamento das vigas com o aço  $\phi$ -2.

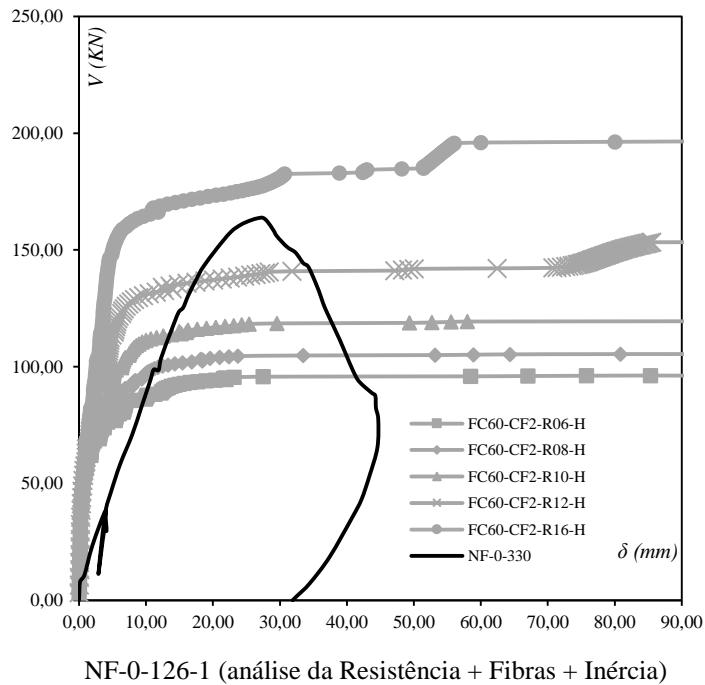


Fonte: Autor.

Continuando com a análise, agora girando em torno do elemento de referência NF-0-330, a Figura 58 indica que viga hipotética FC60-CF2-R16-H apresenta desempenho equivalente no que diz respeito à flexão, observando os seus arranjos de reforços longitudinais é possível

observar uma redução na taxa geométrica de 3,27% ( $5\phi 22.0$ ) para 0,59% ( $2\phi 16.0$ ), contabilizando uma supressão do reforço tradicional na ordem de 79%.

Figura 58. Análise paramétrica de flexão das vigas com o aço  $\phi$ -3.



Fonte: Autor.

Comentando agora sobre a análise de cisalhamento, a Tabela 32 apresenta os principais parâmetros, e a Figura 59 expressa a representação gráfica, no item 59a é possível observar que a viga FC60-CF2-R16-H tem sua ductilidade penalizada pela fragilidade ante o esforço cortante, nesse cenário novamente se recorre à suplementação com estribos, por conseguinte, o item 59b apresenta o comportamento do critério de ruína para uma série de arranjos distintos, inicialmente o espaçamento de 500 mm adotado na análises anteriores não se mostra suficiente, deste modo foram testados uma serie de espaçamentos para se obter o arranjo ideal para o qual a viga apresenta a ductilidade apropriada, nesse contexto é possível observar que a partir de  $S = 200$  mm não faz mais sentido aumentar a taxa de reforço transversal, no entanto, dependendo do nível de ductilidade desejada, o arranjo  $S = 300$  mm já apresenta um nível de segurança adequado, sendo esse último adotado para a presente análise de supressão do reforço tradicional, portanto, ao compulsar a Tabela 32 e cotejando as taxas de reforço transversal,  $\rho_w$  em  $\text{mm}^2/\text{m}$ , das vigas NF-0-330 e FC60-CF2-R16-H ( $\rho_w = 0,44\%$ ), é possível observar uma redução de  $2093,33 \text{ mm}^2/\text{m}$  para  $523,33 \text{ mm}^2/\text{m}$ , supressão de 75%. Por fim, a Tabela 33 apresenta o resumo de todas as supressões auferidas, onde é possível observar que as reduções

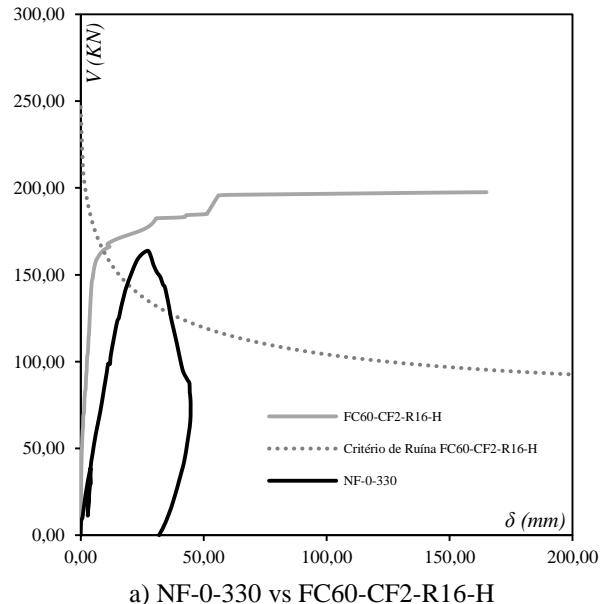
obtidas no reforço longitudinal oscilaram entre 33,33% e 92,25%, ao passo que referente ao reforço transversal os valores variaram entre 75,00% e 100,00%. Adicionalmente, ainda com relação ao cisalhamento, por questão de segurança, pode ser discutida a possibilidade de uma taxa mínima de armadura mesmo com a dição de fibras de aço apontando para a supressão total do reforço convencional, com especial atenção para vigas de elevada altura útil e baixa taxa de armadura longitudinal.

Tabela 32. Parâmetros do critério de ruína por cisalhamento das vigas com o aço  $\phi$ -3.

Viga	$V_R$ (kN)	$M_v$ (kN·m)	$M_R$ (kN·m)	$\alpha$	$\beta$	$S$	$\rho_w$ (mm <sup>2</sup> /m)
NF-0-330	277,84	236,17	139,01	1,0356	1,0417	75,00	2093,33
FC60-CF2-R16-H	126,75	107,74	141,05	1,0834	1,1667	-	0,00
FC60-CF2-R16-H ( $\rho_w = 0,26\%$ )	192,29	163,45	141,05	1,0834	1,1667	500,00	314,00
FC60-CF2-R16-H ( $\rho_w = 0,33\%$ )	208,67	177,37	141,05	1,0834	1,1667	400,00	392,50
FC60-CF2-R16-H ( $\rho_w = 0,44\%$ )	235,98	200,58	141,05	1,0834	1,1667	300,00	523,33
FC60-CF2-R16-H ( $\rho_w = 0,65\%$ )	290,59	247,00	141,05	1,0834	1,1667	200,00	785,00
FC60-CF2-R16-H ( $\rho_w = 0,87\%$ )	345,21	293,42	141,05	1,0834	1,1667	150,00	1046,67
FC60-CF2-R16-H ( $\rho_w = 1,09\%$ )	399,82	339,85	141,05	1,0834	1,1667	120,00	1308,33

Fonte: Autor.

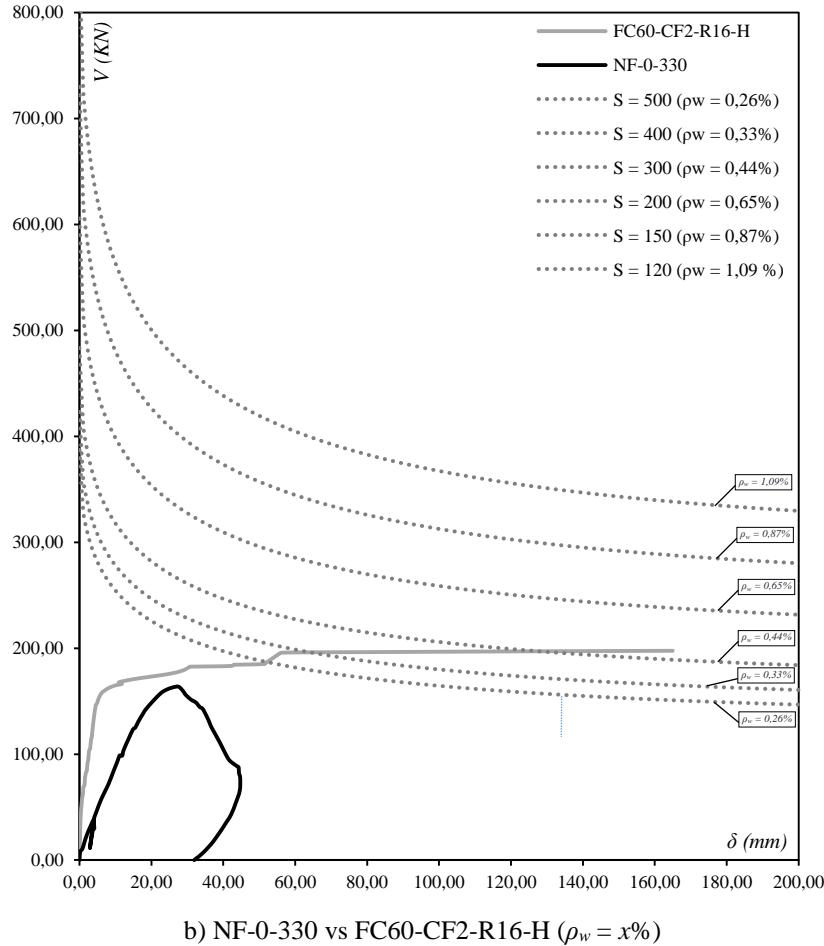
Figura 59. Análise paramétrica de cisalhamento das vigas com o aço  $\phi$ -3.



a) NF-0-330 vs FC60-CF2-R16-H

Fonte: Autor.

Figura 59. Análise paramétrica de cisalhamento das vigas com o aço  $\phi-3$  (continuação).



Fonte: Autor.

Tabela 33. Resumo das supressões auferidas.

Viga		Redução do reforço convencional	
Referência	Hipotética	Longitudinal	Transversal
NF-0-063	FC60-CF2-R08	75,00%	100,00%
0-094-1	FC60-CF2-R16	33,33%	100,00%
0-094-1	FC60-CF2-R06-H ( $\rho_w = 0,26\%$ )	84,50%	80,00%
NF-0-126-1	FC60-CF2-R16	50,00%	100,00%
NF-0-126-1	FC60-CF2-R06-H ( $\rho_w = 0,26\%$ )	92,25%	80,00%
NF-0-330	FC60-CF2-R16-H ( $\rho_w = 0,44\%$ )	78,84%	75,00%

Fonte: Autor.

## 7 CONCLUSÃO

No presente trabalho, investigou-se a interação flexão-cisalhamento em vigas de Concreto Reforçado com Fibras de Aço. A pesquisa foi viabilizada a partir de uma metodologia que mesclou soluções numéricas, analíticas e empíricas, que combina um modelo numérico para representar o comportamento à flexão e um modelo analítico para reproduzir o comportamento

ante os esforços de cisalhamento, permitindo uma análise gráfica e otimizada de vigas no ELS e no ELU, tal modelo, após sua validação, foi utilizado para empreender análises paramétricas, buscando avaliar a possibilidade de substituir os esforços convencionais, barras longitudinais e estribos, e reforçar vigas preeminentemente com fibras de aço. Para viabilizar e potencializar as fibras enquanto reforço estrutural, foram empregadas estratégias práticas, a saber, o aumento da resistência à compressão do concreto e a otimização da seção transversal da viga.

Com base nas análises empreendidas, foram auferidas as seguintes conclusões:

- O DOCROS se mostrou uma ferramenta assertiva no que se refere a reproduzir numericamente o comportamento de vigas fletidas em termos de *momento-curvatura*, com base nessa resposta foram implementadas duas metodologias para se obter o registro *carga-deslocamento* de uma viga, uma mais refinada com base na discretização do elemento ao longo do vão, e outra simplificada baseada na equação da linha elástica que funciona a partir da generalização da rigidez de uma determinada seção para todas as seções ao longo do vão, o que acaba por subestimar a rigidez global do elemento estrutural. Nesse cenário foi observado que essa diferença entre os métodos na determinação da rigidez do elemento não apresenta diferenças significativas a ponto comprometer a credibilidade do método simplificado, o que também foi reforçado pela propinquidade observada entre o supradito procedimento e os respectivos registros experimentais tomados como referência.
- A lei constitutiva proposta para representar o comportamento à tração do CRFA, que foi obtida a partir de uma simplificação do modelo preconizado pelo FIB MODEL CODE 10 (2012), se mostrou assertiva ao ser ponderada nas modelagens numéricas, e que em conjunto com as equações para estimativa das resistências residuais características do CRFA, se provou como um modelo de fácil implementação e que representa de forma adequada os registros experimentais, se credenciando como um possível modelo normativo para representar o CRFA tracionado, aliando praticidade e precisão.
- Foi observado que ponderar o efeito *tension-estiffening* é imperativo para se obter bons resultados em modelagens de vigas em concreto armado (sem fibras), e o modelo proposto na pesquisa corrente, que mescla as propostas do FIB MODEL CODE 10 (2012) e de TORRES *et al.* (2004), se mostrou assertivo em ponderar o referido fenômeno tanto de uma perspectiva física quanto matemática, considerando os principais parâmetros que influenciam nesse efeito.

- O modelo desenvolvido para estimar as resistências residuais características do CRFA se mostrou assertivo, o objetivo era apresentar equações práticas, mas com boa precisão, o que ficou constatado tanto na comparação com métodos de MORAES NETO *et al.* (2014) e MOUSSA (2017) como nos resultados obtidos com base nas modelagens numéricas, cálculo do momento fletor resistente  $M_R$  e resistência ao cisalhamento  $V_R$ , que por sua vez dependem das informações fornecidas pelas equações desenvolvidas.
- O critério de ruína desenvolvido, que representa a resistência ao cisalhamento em função do deslocamento, se mostrou assertivo, viabilizando a análise em plano cartesiano do comportamento de uma viga sob esforço cortante, o modelo reuniu em sua formulação os principais parâmetros que influenciam de forma imperativa no modo de ruptura do elemento observado, a saber, a resistência ao cisalhamento, a resistência à flexão, geometria e posição de aplicação da carga, gerando novas possibilidades para a análise, dimensionamento e otimização de vigas solicitadas por esforço cortante.
- Para viabilizar o cálculo do momento fletor resistente de um grande número de vigas, seja em CS ou CRFA, foi desenvolvido um modelo de flexão simplificado baseado na proposta do FIB MODEL CODE 10 (2012), nesse algoritmo foi admitido o escoamento da armadura longitudinal tracionada e desconsiderada a influência do reforço comprimido, essas hipóteses, em adição ao modelo de estimativa das resistências residuais, possibilitou o cálculo de forma prática da linha neutra, especialmente em vigas de CRFA que usualmente dependem de um modelo interativo para determinar o valor desse parâmetro. Apesar das simplificações o modelo se mostrou assertivo quando cotejado à resultados experimentais, adicionalmente, os bons resultados do Critério de Ruína também atestam, mesmo que de forma indireta, a acurácia do modelo de flexão proposto.
- As fibras de aço figuram como alternativa viável aos reforços convencionais, barras longitudinais e estribos, no entanto supressões relevantes só foram auferidas ao associar o consumo de fibras com o aumento do  $f_c$ , também sendo potencializadas com a otimização da seção transversal. Nesse cenário ao associar as fibras de aço ao aumento da resistência à compressão foram viabilizadas reduções de 33,33% a 75,00% no reforço longitudinal e de 100,00% da armadura transversal. Ao passo que, ao associar os parâmetros: consumo de fibras, aumento da resistência do concreto e otimização da seção; foram obtidas reduções do reforço

longitudinal entre 78,84% e 92,25%, com relação aos estribos os valores ficaram entre 75,00% e 80,00%.

- Por questão de segurança, pode ser discutida a possibilidade de atribuir uma taxa mínima de armadura transversal para vigas mesmo com a dição de fibras de aço apontando para a supressão total do reforço convencional, com especial atenção para elementos de elevada altura útil e baixa taxa de armadura longitudinal, que sofrem a maior penalização na resistência devido ao efeito escala e ao efeito pino.

- O modelo desenvolvido na corrente pesquisa se mostrou uma ferramenta promissora no que se refere ao dimensionamento de vigas tanto em CS como em CRFA, pois é possível analisar o elemento sob a ótica da flexão e do cisalhamento de forma mútua e otimizada, observando o comportamento da peça no ELS e no ELU, verificando se há a ductilidade adequada e observando se a viga não está sendo reforçada de forma desnecessária.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABNT NBR 14724. (2011). **Informação e documentação - Trabalhos acadêmicos - Apresentação**. ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas, Rio de Janeiro.
- ACI 318 (2014). **ACI Committee 318, “Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary” (318R-14)**. American Concrete Intitute, Farmington Hills.
- ACI 544 (1988). **ACI Committee 544, “Design considerations for steel-fiber reinforced concrete” (4R-188)**. American Concrete Institute, Detroit.
- ACI 544.1R (1996). **State-of-the-art report on fiber reinforced concrete**. Reported by ACI Committee 544, American Concrete Intitute. (Reapproved 2002).
- AMIN, A.; FOSTER, S.J. (2016). **Predicting the Flexural Response of Steel Fibre Reinforced Concrete Prismas Using a Sectional Model**. Cement and Concrete Composites, V. 67.
- AMIN, A.; FOSTER, S.J. (2016). **Shear strength of steel fibre reinforced concrete beams with stirrups**. Engineering Structures, Vol. 111, pg. 323-332.
- AMIN, A.; FOSTER, S.J.; MUTTONI, A. (2013). **Evaluation of The Tensile Strength of SFRC as derived from Inverse Analysis of Notched Bending Test**. Proc. of 8th Int. Conf. on Fracture Mechanics Concrete & Concrete Structures (FraMCoS-8), 1049-1057, Toledo, Spain.
- AOUDE, H.; BELGHITI, M.; COOK, W. D.; MITCHELL, D. (2012). **Response of Steel Fiber-Reinforced Concrete Beams with and without Stirrups**. ACI Structural Journal, Vol. 109, No. 3, pg. 359-367.
- AYLIE, H.; ANTONIUS; OKIYARTA, A.W. (2015). **Experimental Study of Steel-fiber Reinforced Concrete Beams with Confinement**. Procedia Engineering, V. 125.
- BARROS, J.; RIBEIRO, A.; CUNHA, V.; ANTUNES, A. (2003). **Fibras de aço no reforço ao corte de vigas de betão armado**. Dimensionamento de estruturas de betão reforçado com fibras de aço, DEC-UM, Portugal.

BARROS, J.A.O. (1995). **Comportamento de betão reforçado com fibras – Análise experimental e simulação numérica**. Dissertação de Doutoramento, Universidade do Porto, Faculdade de Engenharia, Portugal.

BARROS, J.A.O.; CUNHA, V.M.C.F.; RIBEIRO, A.F.; ANTUNES, J.A.B. (2005). **Postcracking behaviour of steel fibre reinforced concrete**. RILEM – Materials and Structures, n.38, 47-56, January–February.

BARROS, J.A.O.; MORAES NETO, B.N.; MELO, G.S.S.A.; FRAZÃO, C.M.V. (2015). **Assessment of the effectiveness of steel fibre reinforcement for the punching resistance of flat slabs by experimental research and design approach**. Composites Part B, v.78, 8-25.

BIOLZI, L.; CATTANEO, S. (2017). **Response of steel fiber reinforced high strength concrete beams: Experiments and code predictions**. Cement and Concrete Composites, V. 77.

BOLLINGER, K. (1985) **Load-Carrying Behaviour and Reinforcement of Axisymmetrically Loaded Reinforced Concrete Plates**. Doctoral thesis, Abteilung Bauwesen der Universität Dortmund, Dortmund, Germany, 262 pg. (in German).

CARDOSO, D.C.T.; PEREIRA, G.B.S.; SILVA, F.A.; SILVA FILHO, J.J.H.; PEREIRA, E.V. (2019). **Influence of steel fibers on the flexural behavior of RC beams with low reinforcing ratios: Analytical and experimental investigation**. Composite Structures, V. 222.

CECS 38. (2004). **Brief Introduction of Technical Specification for Fibre Reinforced Concrete Structures**. Beijing, China Planning Press. (in chinese).

CHAN, H. C.; CHEUNG, Y. K.; HUANG, Y. P. (1992). **Crack analysis of reinforced concrete tension members**. Journal of Structural Engineering, Vol. 118, N 8, pg. 2118– 2132.

CONFORTI, A.; MINELLI, F.; PLIZZARI, G.A. (2013). **Wide-shallow beams with and without steel fibres: A peculiar behavior in shear and flexure**. Composites: Part B, 51, 282- 290.

COPE, R. J.; RAO, P. V.; CLARK, L. A. (1979). **Nonlinear design of concrete bridge slabs using finite element procedures**. Nonlinear Design of Concrete Structures, CSCE-ASCE-ACI-CEB International Symposium, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada.

- CUCCIARA, C.; MENDOLA, L. L.; PAPIA, M. (2004). **Effectiveness of stirrups and steel fibres as shear reinforcement.** Cement & Concrete Composites, Vol. 26, pg. 777-786.
- CUNHA, V.; RIBEIRO, A.; BARROS, J.; ANTUNES, A. (2003). **Betão reforçado com fibras de aço: recomendações normativas, investigação experimental e numérica.** V Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto.
- DESTRÉE, X.; BISSEN, A.M.; BISSEN, LUXEMBOURG. (2009). **Steel-fibre-only reinforced concrete in free suspended elevated slabs.** Concrete Engineering International, Spring.
- DESTRÉE, X.; MANDL, J. (2008). **Steel Fibre Only Reinforced Concrete in Free Suspended Elevated Slabs: Case Studies, Design Assisted by Testing Route, Comparison to the Latest SFRC Standard Documents.** Tailor Made Concrete Structures – Walraven & Stoelhorst (eds), Taylor & Francis Group, London.
- DING, Y., ZHANG, F., TORGAL, F., ZHANG, Y. (2012). **Shear behaviour of steel fibre reinforced self-consolidating concrete beams based on the modified compression field theory.** Composite Structures, Vol. 94, No. 8, pg 2440-2449.
- EHE 08. (2008). **Instrucción Española de Hormigón Estructural 2008.** Ministerio de Fomento, Madrid, España.
- FERRER BOIX, C. (2003). **Experimental and numerical analysis of the shear failure in steel fibre reinforced concrete.** Minor thesis, Universitat Politècnica de Catalunya. Departament de Resistència de Materials i Estructures a l'Enginyeria, May.
- FIB MODEL CODE 10. (2012). **Model Code 2010.** Fédération Internationale du Béton, Final draft, Vol. 2, Bulletin 65.
- FIGUEIREDO, A. D. D. (2000). **Concreto com Fibras de Aço.** São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Departamento de Engenharia Civil 70 p. ISBN 0103-9830.
- FIGUEIREDO, A. D. D. (2011). **Concreto Reforçado com Fibra de Aço.** São Paulo: Tese (Livre-Docência) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. 248 p.
- FLOEGL, H.; MANG, M. (1982). **Tension stiffening concept based on bond slip.** Journal of Structural Engineering, Vol. 108, N 12, pg. 2681–2701.

- GALI, S.; SUBRAMANIAM, K. V. L. (2019). **Influence of the Cohesive Stresses on Shear Capacity of Reinforced SFRC Beams without Stirrups: a Discrete Crack Approach.** Engineering Fracture Mechanics, Vol. 206, pg. 218-232.
- GANESAN, N.; RAMANA-MURTHY J.V. (1990). **Strength and Behavior of Confined Steel Fiber Reinforced Concrete Columns.** ACI Materials Journal, V. 87, Issue 3.
- GAO, D.Y.; HAI, H.; LEI, J. (2011). **Transfer Mechanism of Steel Fiber Reinforced High Strength Concrete Three-Pile Caps.** Applied Mechanics and Materials, V. 71-78.
- GIACCIO, G.; TOBES, J.M.; ZERBINO, R. (2008). **Use of small beams to obtain design parameters of fibre reinforced concrete.** Cement & Concrete Composites, 30, 297-306.
- GILBERT, R. I.; WARNER, R. F. (1978). **Tension stiffening in reinforced concrete slabs.** J. Journal of Structural Engineering, Vol. 104, No. 12, pg. 1885–1900.
- GOMES, L. D. S. (2016). **Análise experimental da eficiência das fibras de aço no reforço ao cisalhamento de vigas em concreto armado.** Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Pará, Belém, Pará, Brasil.
- GUPTA, A. K.; MAESTRINI, S. R. (1990). **Tension-stiffness model for reinforced concrete bars.** Journal of Structural Engineering, Vol. 116, N 3, pg. 769–790.
- HENAGER, C.H.; DOHERTY, T.J. (1976). **Analysis of reinforced fibrous concrete beams.** Journal of the Struct Division, v. 102, issue ST 1, pg 177-188.
- HSU, L.S.; HSU, C.T.T. (1994). **Stress-Strain Behavior of Steel-fiber High-Strength Concrete Under Compression.** ACI Structural, V. 91, Issue 4.
- IMAM, M.; VANDEWALLE, L.; MORTELMANS, F. (1995). **Shear - moment analysis of reinforced high strength concrete beams containing steel fibres.** Canadian Journal of Civil Engineering, Vol 2, June, pg. 462-470.
- IMAN, M.; VANDERWALLE, L.; MORTELMANS, F.; VAN GERMET, D. (1997). **Shear domain of fibre-reinforced high-strength concrete beams.** Engineering Structures, v. 19, n. 9, pg. 738-747.

ISO 15630-1 (2002). **Steel for the reinforcement and prestressing of concrete - Test methods - Part 1: Reinforcing bars, wire rod and wire.** International Standard, First edition.

JANG, S.-J.; YUN, H.-D. (2018). **Combined Effects of Steel Fiber and Coarse Aggregate Size on the Compressive and Flexural Toughness of High-Strength Concrete.** Composite Structures, V. 185.

JONGVIVATSAKUL, P.; MATSUMOTO, K.; NIWA, J. (2013). **Shear capacity of fiber reinforced concrete beams with various type and combinations of fibers.** Journal of JSCE, Vol. 1, pg. 228-241.

JSCE. (2008). **Recommendations for Design and Construction of High Performance Fiber Reinforced Cement Composites with Multiple Fine Cracks (HPFRCC).** Japanese Society of Civil Engineers, Concrete Committee, March.

KAKLAUSKAS, G.; GRIBNIAK, V.; MESKENAS, A.; BACINSKAS, D.; JUOZAPAITIS, A.; SOKOLOV, A.; ULBINAS, D. (2014). **Experimental investigation of the deformation behavior of SFRC beams with an ordinary reinforcement.** Mechanics of Composite Materials, Vol. 50, No. 4, pg. 417-426.

KHALOO, A.; MOLAEI RAISI, E.; HOSSEINI, P.; TAHSIRI, H. (2014). **Mechanical Performance of Self-Compacting Concrete Reinforced with Steel Fibers.** Construction and Building Materials, V. 51.

KIM, C.-G.; LEE, H.; PARK, H.-G.; HONG, G.-H.; KANG, S.-M. (2017). **Effect of Steel Fibers on Minimum Shear Reinforcement of High-Strength Concrete Beams.** ACI Structural Journal, Vol. 114, No. 5, pg. 1109-1119.

KINNUNEN, S.; NYLANDER, H. (1960). **Punching of Concrete Slabs Without Shear Reinforcement.** Transactions of the Royal Institute of Technology, n. 158, Stockholm, Sweden, 112 pg.

LAM, T.Q.K.; DO, T.M.D.; NGO, V.T.; NGUYEN, T.C.; HUYNH T.P. (2019). **Numerical simulation and experiment on steel fiber concrete beams.** Journal of Physics: Conference Series, Vol. 1425.

LEE, J.-H.; CHO, B.; CHOI, E. (2017). **Flexural Capacity of Fiber Reinforced Concrete with a Consideration of Concrete Strength and Fiber Content**. Construction and Building Materials, V. 138.

LEE; J.-H. (2017). **Influence of Concrete Strength Combined with Fiber Content in the Residual Flexural Strengths of Fiber Reinforced Concrete**. Composite Structures, V. 168.

LIM, T.Y.; PARAMASIVAM, P.; LEE, S.L. (1987). **Analytical Model for Tensile Behavior of Steel-Fiber Concrete**. ACI Materials Journal, V. 84, Issue 4.

LIMA, R.P.A.F.P. (2012). **Utilização de fibras metálicas com funções estruturais em estruturas de betão**. Dissertação de mestrado, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal.

LIN, C. S.; SCORDELIS, A. C. (1975). **Nonlinear Analysis of RC Shells of General Form**. Journal of Structural Engineering, Vol. 101, No. 3, pg. 523-538.

LOURENÇO, L.A.P. (2012). **Betão Reforçado com Fibras: aplicações e técnicas de inspeção e reforço de elementos estruturais afetados pela ação de um fogo**. Tese de Doutoramento, Universidade do Minho, Escola de Engenharia.

MICHELS, J.; CHRISTEN, R.; Waldmann, D. (2013). **Experimental and Numerical Investigation on Postcracking Behavior of Steel Fiber Reinforced Concrete**. Engineering Fracture Mechanics, V. 98.

MICHELS, J.; WALDMANN, D.; MAAS, S.; ZÜRBES, A. (2012). **Steel Fibers as Only Reinforcement for Flat Slab Construction – Experimental Investigation and Design**. Construction and Building Materials, V. 26, Issue 1.

MOBASHER, B.; YAO, Y.; SORANAKOM, C. (2015). **Analytical Solutions for Flexural Design of Hybrid Steel Fiber Reinforced Concrete Beams**. Engineering Structures, V. 100.

MONTAIGNAC, R.; MASSICOTTE, B.; CHARRON, J-P.; NOUR, A. (2011). **Design of SFRC structural elements: post-cracking tensile strength measurement**. Materials and Structures, v.45, Issue 4, 609-622.

MORAES NETO, B. N. (2013). **Comportamento à punção de lajes lisas em concreto reforçado com fibras de aço sob carregamento simétrico.** Tese de Doutorado em estruturas e construção civil, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília.

MORAES NETO, B.; BARROS, J.; MELO, G. (2014). **Model to Simulate the Contribution of Fiber Reinforcement for the Punching Resistance of RC Slabs.** Journal of Materials in Civil Engineering, v.26, Issue 7, July.

MOREILLON, L. (2013). **Shear and punching shear behavior of structural elements in High Performance Fibre Reinforced Concrete.** Doctoral Thesis, Université Paris-EST.

MOUSSA, Y.H. (2017). **Eficácia das fibras de aço no reforço à flexão de vigas em concreto armado com taxa de armadura mínima.** Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Pará, Belém, Pará, Brasil.

MUTTONI, A. (2003). **Shear and Punching Strength of Slabs without Shear Reinforcement.** Beton-und Stahlbetonbau, Vol. 98, No. 2, Berlin, Germany, pg. 74-84. (in German).

MUTTONI, A. (2008). **Punching Shear Strength of Reinforced Concrete Slabs without Transverse Reinforcement.** ACI Structural Journal, v. 105, n. 4, pg. 440-450.

MUTTONI, A.; SCHWARTZ, J. (1991). **Behaviour of Beams and Punching in Slabs without Shear Reinforcement.** IABSE Colloquium, V. 62, Zurich, Switzerland, pg. 703-708.

NEWMARK, N.M. (1942). **Numerical Procedure for Computing Deflections, Moments, and Buckling Loads.** American Society of Civil engineers, Paper N. 2202.

OH, B.H. (1992). **Flexural Analysis of Reinforced Concrete Beams Containing Steel Fibers.** Journal of Structural Engineering, v.118, n.10, 2821-2835.

OLIVITO, R.S.; ZUCCARELLO, F.A. (2010). **An Experimental Study on the Tensile Strength of Steel Fiber Reinforced Concrete.** Composites Part B: Engineering, V. 41, Issue, 3.

PAJĄK, M.; PONIKIEWSKI, T. (2013). **Flexural behavior of self-compacting concrete reinforced with different types of steel fibers.** Construction and Building Materials, 47, 397-408.

PAULTRE, P.; EID, R.; LANGLOIS, Y.; LÉVESQUE, Y. (2010). **Behavior of Steel Fiber-Reinforced High-Strength Concrete Columns under Uniaxial Compression.** Journal of Structural Engineering, V. 136, Issue 10.

POH, J.; TAN, K.H.; PETERSON, G.L.; WEN, D. (2008). **Structural testing of steel fibre reinforced concrete (sfrc) tunnel lining segments in Singapore.** Land Transport Authority, Hampshire Road, ITA 2008.

PUJADAS, P.; BLANCO, A.; FUENTE, A.; AGUADO, A. (2012). **Cracking behavior of FRC slabs with traditional reinforcement.** Materials and Structures, v.45, Issue 5, 707-725.

RILEM TC 162-TDF (2003). **Test and design methods for steel fibre reinforced concrete: Bending test, Final Recommendation.** Materials and Structures, Vol. 35, pg. 579-582.

RILEM TC 162-TDF. (2002). **Bending test: Final recommendation.** Test and design methods for steel fibre reinforced concrete, Materials and Structures, Vol. 35, pp. 579-582, November.

SALEHIAN, H.; BARROS, J.A.O. (2015). **Assessment of the Performance of Steel Fibre Reinforced Self-Compacting Concrete in Elevated Slabs.** Cement and Concrete Composites, V. 55.

SCANLON, A. (1971). **Time dependent deflections of reinforced concrete slabs.** PhD thesis, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada.

SONG, P.S.; HWANG, S. (2004). **Mechanical Properties of High-Strength Steel Fiber-Reinforced Concrete.** Construction and Building Materials, V. 18, Issue 9.

SWAMY, R.N.; AI-TA'AN, S.A. (1981). **Deformation and Ultimate Strength in Flexure of Reinforced Concrete Beams Made with Steel Fiber Concrete.** ACI Journal Proceedings, V. 78, Issue 5.

TIBERTI, G.; MINELLI, F.; PLIZZARI, G. (2015). **Cracking Behavior in Reinforced Concrete Members with Steel Fibers: A Comprehensive Experimental Study.** Cement and Concrete Research, V. 68.

TORRES, L. (2001). **Modelo numérico y verificación experimental del comportamiento en servicio de estructuras de hormigón.** PhD thesis, Architecture Structures Dept., Technical University of Catalonia, Barcelona, Spain. (in Spanish).

TORRES, L.; BOZZO, L. M.; PURROY, F.; LÓPEZ-ALMANSA, F. (1998). **Nonlinear analysis of evolving concrete structures.** Proc., 4th World Conf. on Computational Mechanics, CIMNE, Barcelona, Spain.

TORRES, L.; LÓPEZ-ALMANSA, F.; BOZZO, L. M. (2004). **Tension-Stiffening Model for Cracked Flexural Concrete Members.** Journal of Structural Engineering, Vol. 130, No. 8, August, pg. 1242–1251.

TUNG, N.D.; TUE, N.V. (2018). **Shear resistance of steel fiber-reinforced concrete beams without conventional shear reinforcement on the basis of the critical shear band concept.** Engineering Structures, Vol. 168, pg. 698-707.

WU, Z.; YOSHIKAWA, H.; TANABE, T. (1991). **Tension-stiffness model for cracked reinforced concrete.** Journal of Structural Engineering, Vol. 117, N 3, pg. 715–732.

YOO, D.-Y.; YOON, Y.-S.; BANTHIA, N. (2015). **Flexural Response of Steel-Fiber-Reinforced Concrete Beams: Effects of Strength, Fiber Content, and Strain-Rate.** Cement and Concrete Composites, V. 64.

YOU, Z., DING, Y., NIEDEREGGER, C. (2010). **Replacing Stirrups of Self-Compacting Concrete Beams with Steel Fibers.** Transactions of Tianjin University. Vol. 16, December, pg. 411-416.

ZHAO, G.; DI PRISCO, M.; VANDEWALLE, L. (2015). **Experimental investigation on uniaxial tensile creep behavior of cracked steel fiber reinforced concrete.** Materials and Structures, Vol. 48, pg. 3173–3185.

ZIJL, G.P.A.G.; MBEWE, P.B.K. (2013). **Flexural modeling of steel fibrereinforced concrete beams with and without steel bars.** Engineering Structures, v. 53, pg. 52-62, 2013.

## ANEXO A: Banco de Dados para desenvolvimento do modelo de predição das Resistências Residuais.

Tabela A.1. Banco de dados para análise de  $f_{R1}$  e  $f_{R3}$ .

Autor	Prisma	$f_c$ (Mpa)	$C_f$ (%)	$l_f$ (mm)	$d_f$ (mm)	$l_f/d_f$	$f_{R1}$ (Mpa)	$f_{R3}$ (Mpa)
AMIN et al. (2013)	DA05EH	56,20	0,50	35,00	0,55	63,64	4,96	4,55
	DA05S	63,70	0,50	13,00	0,20	65,00	3,72	2,07
BARROS (1995)	s3e30	40,60	0,40	30,00	0,50	60,00	3,50	2,73
	s3e45	40,00	0,60	30,00	0,50	60,00	4,83	3,95
	s3e60	36,50	0,80	30,00	0,50	60,00	4,60	3,59
	s4e30	35,70	0,40	60,00	0,80	75,00	3,50	3,15
	s4e45	36,40	0,60	60,00	0,80	75,00	5,13	4,20
	s5e45	54,00	0,60	60,00	0,80	75,00	5,35	3,45
	s5e30	48,40	0,40	60,00	0,80	75,00	4,40	1,64
	S2_3	64,00	0,33	60,00	0,92	65,22	3,68	3,20
BARROS et al. (2015)	S2_4	58,80	0,47	60,00	0,92	65,22	3,68	3,20
	F80/60-30	31,76	0,40	60,00	0,75	80,00	3,49	3,65
	F80/60-20	31,76	0,27	60,00	0,75	80,00	2,62	2,11
	F80/60-10	31,76	0,13	60,00	0,75	80,00	1,76	1,60
	F65/60-15	31,76	0,20	60,00	0,92	65,22	2,62	2,37
	F65/60-35	31,76	0,47	60,00	0,92	65,22	4,03	3,33
	Cf60fc70	63,77	0,80	37,00	0,55	67,27	9,06	8,08
	Cf75fc70	70,02	1,00	37,00	0,55	67,27	12,30	11,55
	Cf60fc50	51,90	0,40	37,00	0,55	67,27	5,71	2,77
	Cf75fc50	55,68	0,40	37,00	0,55	67,27	6,32	3,25
CONFORTI et al. (2013)	FRC25	30,40	0,33	50,00	0,80	62,50	3,01	2,99
	FRC35	29,52	0,47	50,00	0,80	62,50	3,52	3,62
CUNHA et al. (2003)	F65/60Qf15Cv0Id28	31,04	0,20	67,00	1,00	67,00	2,64	2,50
	F65/60Qf25Cv0Id28	31,92	0,33	67,00	1,00	67,00	3,84	3,79
	F65/60Qf35Cv0Id28	31,12	0,47	67,00	1,00	67,00	4,09	3,64
	F80/60Qf10Cv0Id28	32,32	0,13	80,00	1,00	80,00	1,78	1,60
	F80/60Qf20Cv0Id28	34,56	0,27	80,00	1,00	80,00	2,93	2,57
	F80/60Qf30Cv0Id28	25,04	0,39	80,00	1,00	80,00	3,57	3,61
FERRER BOIX (2003)	pilot 1 beam 1	56,51	1,00	30,00	0,50	60,00	9,60	6,72
	pilot 2 beam 2	56,51	1,00	30,00	0,50	60,00	9,60	7,36
	pilot 3 beam 3	56,51	1,00	30,00	0,50	60,00	8,00	5,12
	test 2 beam 2	60,18	0,50	30,00	0,50	60,00	6,72	4,80
	test 3 beam 3	60,18	0,50	30,00	0,50	60,00	4,35	3,65
	test 1 beam 4	56,51	1,00	30,00	0,50	60,00	8,00	5,44
	test 2 beam 5	56,51	1,00	30,00	0,50	60,00	10,40	7,20
	test 3 beam 6	56,51	1,00	30,00	0,50	60,00	9,60	7,04
GIACCIO et al. (2008)	C1-40	56,00	0,53	30,00	0,50	60,00	5,00	4,80
	C1-20	59,70	0,27	30,00	0,50	60,00	2,30	1,70
	C2-40	53,60	0,53	60,00	0,75	80,00	4,00	6,20
LIMA (2012)	P2	62,80	0,52	80,00	1,00	80,00	7,50	6,10
	P3	63,00	0,79	80,00	1,00	80,00	7,00	5,30
	P1	63,30	0,26	80,00	1,00	80,00	3,10	1,80
LOURENÇO (2012)	C20/25_Vf20	27,40	0,29	65,00	1,00	65,00	2,74	2,56
	C20/25_Vf30	29,80	0,42	65,00	1,00	65,00	2,99	2,99
	C20/25_Vf45	27,60	0,62	65,00	1,00	65,00	4,65	4,37
	C30/37_Vf20	40,90	0,28	65,00	1,00	65,00	3,61	3,50
	C30/37_Vf45	39,90	0,61	65,00	1,00	65,00	4,85	5,23
	C30/37_Vf75	46,10	0,98	65,00	1,00	65,00	8,70	9,27
	C45/55_Vf30	45,40	0,38	65,00	1,00	65,00	3,62	3,67
	C45/55_Vf60	54,50	0,79	65,00	1,00	65,00	7,78	9,14
	C45/55_Vf75	61,60	0,95	65,00	1,00	65,00	10,69	11,00
MONTAIGNAC et al. (2011)	F60-1	63,20	1,00	60,00	0,75	80,00	8,72	7,52
	F35-1	46,90	1,00	35,00	0,55	63,64	6,56	5,28

Tabela A.1. Banco de dados para análise de  $f_{R1}$  e  $f_{R3}$  (continuação).

Autor	Prisma	$fc$ (Mpa)	$Cf$ (%)	$lf$ (mm)	$df$ (mm)	$lf/df$	$f_{R1}$ (Mpa)	$f_{R3}$ (Mpa)
MONTAIGNAC et al. (2011)	F35-1,25	56,10	1,25	35,00	0,55	63,64	8,40	6,40
MORAES NETO (2013)	Vf60fc50	51,90	0,80	37,00	0,55	67,27	5,71	2,77
	Vf75fc50	55,68	1,00	37,00	0,55	67,27	6,32	3,25
	Vf90fc50	56,39	1,20	37,00	0,55	67,27	11,02	12,61
	Vf60fc70	63,77	0,80	37,00	0,55	67,27	9,06	8,08
	Vf75fc70	70,02	1,00	37,00	0,55	67,27	12,30	11,55
	Vf90fc70	57,63	1,20	37,00	0,55	67,27	10,51	11,99
MOREILLON (2013)	AV-3	97,50	0,27	30,00	0,38	78,95	4,10	3,10
	B2	102,00	0,27	30,00	0,38	78,95	4,30	2,60
PAJAK e PONIKIEWSKI (2013)	0,5_S	80,10	0,50	30,00	0,80	37,50	2,09	1,00
	1_S	84,60	1,00	30,00	0,80	37,50	3,31	1,93
	1,5_S	87,50	1,50	30,00	0,80	37,50	4,85	2,70
	0,5_HE	98,20	0,50	30,00	0,80	37,50	3,61	2,60
	1_HE	96,50	1,00	30,00	0,80	37,50	5,81	4,46
	1,5_HE	88,60	1,50	30,00	0,80	37,50	8,09	6,32
POH et al. (2008)	A	45,92	0,40	60,00	0,75	80,00	4,00	2,60
	B	34,72	0,47	60,00	0,75	80,00	3,00	3,00
	C	48,48	0,53	60,00	0,75	80,00	3,30	2,40
PUJADAS et al. (2012)	SF1_20	25,00	0,27	35,00	0,55	63,64	2,55	2,22
	SF2_20	25,00	0,27	60,00	0,75	80,00	2,96	3,23
	SF1_40	25,00	0,53	35,00	0,55	63,64	4,10	3,94
	SF2_40	25,00	0,53	60,00	0,75	80,00	3,93	4,56
Zhao et al. (2016)	1.1	45,00	1,07	60,00	0,90	66,67	6,07	5,55
	1.2	45,00	1,07	60,00	0,90	66,67	7,33	6,59
	1.4	45,00	1,07	60,00	0,90	66,67	4,44	4,95
	1.5	45,00	1,07	60,00	0,90	66,67	5,16	5,62
	1.8	45,00	1,07	60,00	0,90	66,67	4,35	4,68
	1.9	45,00	1,07	60,00	0,90	66,67	5,34	4,89
	1.11	45,00	1,07	60,00	0,90	66,67	8,29	7,17
	1.12	45,00	1,07	60,00	0,90	66,67	6,75	6,43
	1.15	45,00	1,07	60,00	0,90	66,67	7,92	6,68
	1.16	45,00	1,07	60,00	0,90	66,67	7,97	7,24
	2.1	45,00	1,07	60,00	0,90	66,67	6,28	5,54
	2.2	45,00	1,07	60,00	0,90	66,67	7,08	6,16
	2.3	45,00	1,07	60,00	0,90	66,67	6,78	6,52
	2.6	45,00	1,07	60,00	0,90	66,67	7,05	6,87
	2.8	45,00	1,07	60,00	0,90	66,67	9,31	8,54
	2.9	45,00	1,07	60,00	0,90	66,67	8,50	7,35
	2.10	45,00	1,07	60,00	0,90	66,67	7,30	7,05
	2.11	45,00	1,07	60,00	0,90	66,67	9,39	9,55
	2.14	45,00	1,07	60,00	0,90	66,67	8,12	7,51
	1,3	47,00	1,07	60,00	0,90	66,67	7,01	6,05
	1.7	51,00	1,07	60,00	0,90	66,67	6,63	6,17
	1.13	57,00	1,07	60,00	0,90	66,67	6,99	6,00
	1.10	54,00	1,07	60,00	0,90	66,67	8,62	7,08
	1.14	58,00	1,07	60,00	0,90	66,67	7,07	6,21
	1.6	50,00	1,07	60,00	0,90	66,67	5,56	5,13
	2.4	64,00	1,07	60,00	0,90	66,67	5,44	6,01
	2.7	66,00	1,07	60,00	0,90	66,67	6,69	6,14
	2.13	72,00	1,07	60,00	0,90	66,67	7,03	6,35
	2.12	71,00	1,07	60,00	0,90	66,67	8,59	6,97

## ANEXO B: Banco de dados para desenvolvimento do Critério de Ruína por Cisalhamento.

Tabela B.1. Banco de dados para análise do Critério de Ruína.

Autor	Viga	<i>C<sub>f</sub></i> (%)	<i>lf/df</i>	<i>f<sub>c</sub></i> (Mpa)	<i>d</i> (mm)	<i>h</i> (mm)	<i>b</i> (mm)	<i>a/d</i>	<i>ρ<sub>l</sub></i> (%)	<i>ρ<sub>w</sub></i> (%)	<i>V<sub>u</sub></i> (kN)	<i>δ<sub>u</sub></i> (mm)	Tipo de Ruína
AMIN e FOSTER (2016)	B0-450-10-450	0,00	0,00	34,00	622,00	700,00	300,00	2,80	1,98	0,12	236,00	10,10	cisalhamento
	B25-0-0-0	0,33	65,00	34,00	622,00	700,00	300,00	2,80	1,98	0,00	274,00	11,80	cisalhamento
	B25-550-6-450	0,33	65,00	34,00	622,00	700,00	300,00	2,80	1,98	0,04	363,00	15,30	cisalhamento
	B25-550-6-450	0,33	65,00	34,00	622,00	700,00	300,00	2,80	1,98	0,12	334,00	14,20	cisalhamento
	B25-550-6-450	0,33	65,00	46,00	622,00	700,00	300,00	2,80	1,98	0,04	322,00	15,00	cisalhamento
	B25-550-6-450	0,33	65,00	46,00	622,00	700,00	300,00	2,80	1,98	0,12	357,00	16,60	cisalhamento
	B25-550-6-450	0,00	0,00	36,00	622,00	700,00	300,00	2,80	1,98	0,04	180,00	6,20	cisalhamento
	B25-550-6-450	0,71	65,00	36,00	622,00	700,00	300,00	2,80	1,98	0,00	344,00	14,30	cisalhamento
	B25-550-6-450	0,71	65,00	36,00	622,00	700,00	300,00	2,80	1,98	0,04	462,00	20,50	cisalhamento
	B25-550-6-450	0,71	65,00	36,00	622,00	700,00	300,00	2,80	1,98	0,12	535,00	24,20	cisalhamento
AOUDE et al (2012)	A0%	0,00	0,00	23,30	202,00	250,00	150,00	3,00	1,32	0,00	36,50	4,86	cisalhamento
	A0,5%	0,50	55,00	21,30	202,00	250,00	150,00	3,00	1,32	0,00	47,50	7,45	cisalhamento
	A1%	1,00	55,00	19,60	202,00	250,00	150,00	3,00	1,32	0,00	56,50	31,77	flexão
	B0%	0,00	0,00	23,30	437,00	500,00	300,00	3,10	1,53	0,00	125,10	8,24	cisalhamento
	B0,5%	0,50	55,00	21,30	437,00	500,00	300,00	3,10	1,53	0,00	154,30	12,51	cisalhamento
	B1%	1,00	55,00	19,60	437,00	500,00	300,00	3,10	1,53	0,00	198,00	16,79	cisalhamento
	BF0%	0,00	55,00	23,30	437,00	500,00	300,00	3,10	1,53	0,24	245,00	39,56	cisalhamento*
	BF0,5%	0,50	55,00	21,30	437,00	500,00	300,00	3,10	1,53	0,24	244,00	94,14	cisalhamento*
	BF1%	1,00	55,00	19,60	437,00	500,00	300,00	3,10	1,53	0,24	244,30	110,88	flexão
CUCCHIARA et al. (2004)	A00	0,00	0,00	41,20	219,00	250,00	150,00	2,80	1,91	0,00	40,50	7,95	cisalhamento
	A01	0,00	60,00	41,20	219,00	250,00	150,00	2,80	1,91	0,19	89,45	14,38	cisalhamento
	A02	0,00	60,00	41,20	219,00	250,00	150,00	2,80	1,91	0,63	113,99	19,11	cisalhamento*
	A10	1,00	60,00	40,85	219,00	250,00	150,00	2,80	1,91	0,00	96,38	13,32	cisalhamento
	A20	2,00	60,00	43,23	219,00	250,00	150,00	2,80	1,91	0,00	103,31	29,04	cisalhamento
	A11	1,00	60,00	40,85	219,00	250,00	150,00	2,80	1,91	0,19	99,67	14,63	cisalhamento
	A21	2,00	60,00	43,23	219,00	250,00	150,00	2,80	1,91	0,19	122,99	35,96	flexão
	A12	1,00	60,00	40,85	219,00	250,00	150,00	2,80	1,91	0,63	115,83	19,47	cisalhamento*
	B00	0,00	0,00	41,20	219,00	250,00	150,00	2,00	1,91	0,00	49,50	4,21	cisalhamento
	B01	0,00	60,00	41,20	219,00	250,00	150,00	2,00	1,91	0,19	60,21	6,46	cisalhamento
	B02	0,00	60,00	41,20	219,00	250,00	150,00	2,00	1,91	0,63	142,57	15,16	cisalhamento
	B10	1,00	60,00	40,85	219,00	250,00	150,00	2,00	1,91	0,00	115,07	10,21	cisalhamento
	B20	2,00	60,00	43,23	219,00	250,00	150,00	2,00	1,91	0,00	115,50	11,06	cisalhamento
	B11	1,00	60,00	40,85	219,00	250,00	150,00	2,00	1,91	0,19	120,82	3,54	cisalhamento
	B21	2,00	60,00	43,23	219,00	250,00	150,00	2,00	1,91	0,19	173,32	27,45	cisalhamento*
	B12	1,00	60,00	40,85	219,00	250,00	150,00	2,00	1,91	0,63	156,60	35,39	cisalhamento*
DING et al. (2012)	SSF0-∞	0,00	0,00	33,80	122,00	150,00	100,00	4,00	2,68	0,00	20,02	2,92	cisalhamento
	SF20-∞	0,27	80,00	36,00	122,00	150,00	100,00	4,00	2,68	0,00	23,96	5,05	cisalhamento
	SF40-∞	0,53	80,00	32,50	122,00	150,00	100,00	4,00	2,68	0,00	36,11	8,11	cisalhamento
	SF60-∞	0,80	80,00	41,20	122,00	150,00	100,00	4,00	2,68	0,00	37,35	6,91	cisalhamento
	SF0-480	0,00	0,00	33,80	122,00	150,00	100,00	4,00	2,68	0,14	25,77	4,55	cisalhamento
	SF20-480	0,27	80,00	36,00	122,00	150,00	100,00	4,00	2,68	0,14	38,45	8,62	cisalhamento
	SF40-480	0,53	80,00	32,50	122,00	150,00	100,00	4,00	2,68	0,14	41,66	7,10	cisalhamento
	SF60-480	0,80	80,00	41,20	122,00	150,00	100,00	4,00	2,68	0,14	44,98	10,73	cisalhamento*
	SF0-240	0,00	0,00	33,80	122,00	150,00	100,00	4,00	2,68	0,28	35,32	5,14	cisalhamento
	SF20-240	0,27	80,00	36,00	122,00	150,00	100,00	4,00	2,68	0,28	36,03	6,93	cisalhamento
	SF40-240	0,53	80,00	32,50	122,00	150,00	100,00	4,00	2,68	0,28	43,34	7,85	cisalhamento*
	SF60-240	0,80	80,00	41,20	122,00	150,00	100,00	4,00	2,68	0,28	42,92	13,67	flexão
	SF0-160	0,00	0,00	33,80	122,00	150,00	100,00	4,00	2,68	0,41	39,59	6,55	cisalhamento
	SF20-160	0,27	80,00	36,00	122,00	150,00	100,00	4,00	2,68	0,41	40,31	6,56	cisalhamento
	SF40-160	0,53	80,00	32,50	122,00	150,00	100,00	4,00	2,68	0,41	41,73	11,30	cisalhamento*
	SF60-160	0,80	80,00	41,20	122,00	150,00	100,00	4,00	2,68	0,41	42,37	12,11	flexão
GALI e SUBRAMANIAM (2019)	SF-0-S1	0,00	0,00	38,70	222,00	250,00	125,00	1,80	1,45	0,00	62,39	3,71	cisalhamento
	SF-0-S2	0,00	0,00	38,70	222,00	250,00	125,00	1,80	1,45	0,00	67,91	3,77	cisalhamento
	SF-0-S3	0,00	0,00	38,70	222,00	250,00	125,00	1,80	1,45	0,00	58,35	3,53	cisalhamento

\* Houve escoamento da armadura longitudinal tracionada.

Tabela B.1. Banco de dados para análise do Critério de Ruína (continuação).

Autor	Viga	<i>C<sub>f</sub></i> (%)	<i>lf/df</i>	<i>f<sub>c</sub></i> (Mpa)	<i>d</i> (mm)	<i>h</i> (mm)	<i>b</i> (mm)	<i>a/d</i>	<i>ρ<sub>f</sub></i> (%)	<i>ρ<sub>w</sub></i> (%)	<i>V<sub>u</sub></i> (kN)	<i>δ<sub>u</sub></i> (mm)	Tipo de Ruína
GALI e SUBRAMANIAM (2019)	SF-0.5-S1	0,50	80,00	38,70	222,00	250,00	125,00	1,80	1,45	0,00	80,30	4,57	cisalhamento
	SF-0.5-S2	0,50	80,00	38,70	222,00	250,00	125,00	1,80	1,45	0,00	74,01	4,20	cisalhamento
	SF-0.5-S3	0,50	80,00	38,70	222,00	250,00	125,00	1,80	1,45	0,00	74,01	4,20	cisalhamento
	SF-0.75-S1	0,50	80,00	38,70	222,00	250,00	125,00	1,80	1,45	0,00	107,50	6,79	cisalhamento
	SF-0.75-S2	0,75	80,00	38,70	222,00	250,00	125,00	1,80	1,45	0,00	118,78	7,54	cisalhamento*
	SF-0.75-S3	0,75	80,00	38,70	222,00	250,00	125,00	1,80	1,45	0,00	124,73	7,46	cisalhamento*
JONGVIVATSAKUL et al. (2013)	SF30	1,00	48,39	56,60	250,00	300,00	150,00	2,80	2,70	0,30	158,80	6,73	cisalhamento
	2F60	1,00	66,67	55,90	250,00	300,00	150,00	2,80	2,70	0,30	196,30	9,43	cisalhamento
KIM et al (2017)	21RC	0,00	0,00	21,00	340,00	400,00	260,00	4,00	1,72	0,00	78,00	7,14	cisalhamento
	21FB	0,75	60,00	21,00	340,00	400,00	260,00	4,00	1,72	0,00	114,00	10,42	cisalhamento
	21SR	0,00	0,00	22,00	340,00	400,00	260,00	4,00	1,72	0,12	95,00	14,74	cisalhamento
	21FSR	0,75	60,00	21,00	340,00	400,00	260,00	4,00	1,72	0,12	186,00	29,41	cisalhamento
	60RC	0,00	0,00	63,00	340,00	400,00	260,00	4,00	1,72	0,00	101,00	8,90	cisalhamento
	60FB	0,75	60,00	56,00	340,00	400,00	260,00	4,00	1,72	0,00	204,00	11,30	cisalhamento
	60SR	0,00	0,00	63,00	340,00	400,00	260,00	4,00	1,72	0,12	126,00	19,15	cisalhamento
	60FSR	0,75	60,00	59,00	340,00	400,00	260,00	4,00	1,72	0,12	245,00	50,00	flexão
YOU et al. (2010)	SFSCCB50-∞	0,67	65,00	65,40	260,00	300,00	200,00	3,00	2,80	0,00	135,15	9,22	cisalhamento
	SFSCCB0-250	0,00	0,00	56,20	260,00	300,00	200,00	3,00	2,80	0,13	139,64	10,16	cisalhamento
	SFSCCB25-250	0,33	65,00	33,80	260,00	300,00	200,00	3,00	2,80	0,13	185,46	12,28	cisalhamento
	SFSCCB50-250	0,67	65,00	65,40	260,00	300,00	200,00	3,00	2,80	0,13	219,78	13,86	cisalhamento
	SFSCCB0-150	0,00	0,00	56,20	260,00	300,00	200,00	3,00	2,80	0,22	154,54	10,39	cisalhamento
	SFSCCB25-150	0,33	65,00	33,80	260,00	300,00	200,00	3,00	2,80	0,22	183,68	13,11	cisalhamento
	SFSCCB40-150	0,53	65,00	60,60	215,00	250,00	125,00	3,20	3,38	0,35	119,52	7,62	cisalhamento
	SFSCCB0-100	0,00	0,00	56,20	215,00	250,00	125,00	3,20	3,38	0,53	110,03	7,53	cisalhamento
	SFCCB50-150	0,67	65,00	65,40	260,00	300,00	200,00	3,00	2,80	0,22	231,51	54,50	flexão

\* Houve escoamento da armadura longitudinal tracionada.